世界数学名题欣赏

不动点定理







辽宁教育出版社

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM






ISBN 7-5382-0433-4
9 787538 204339 >



世界数学名题欣赏丛书

不动点定理

张奠宙　顾鹤荣　著

辽宁教育出版社
1995年·沈阳

图书在版编目（CIP）数据

不动点定理／张奠宙，顾鹤荣著.-沈阳：辽宁教育出版社，1995重印
（世界数学名题欣赏丛书）
ISBN 7-5382-0433-4

Ⅰ.不… Ⅱ.①张… ②顾… Ⅲ.不动点定理
Ⅳ.0189.2

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第16525号

不动点定理
张奠宙 顾鹤荣 著

辽宁教育出版社出版（沈阳市北一马路108号）
辽宁省新华书店发行
沈阳市第二印刷厂印刷

字数：110,000 开本：787×1092 1/32 印张：7 插页：4
印数：3,501—7,500
1989年4月第1版 1995年12月第3次印刷

责任编辑：俞晓群 谭坚　责任校对：孙明晶
封面设计：李国盛 李飞

ISBN7-5382-0433-4/G·442
定价：8.00元
每函十三册，总定价：90.00元

内 容 简 介

本书是"世界数学名题欣赏丛书"之一。不动点定理是20世纪数学发展中的重大课题，其影响遍及整个数学界。本书以介绍布劳威尔不动点定理为主线，涉及数学分析、拓扑学、非线性分析等多种问题。作者以"欣赏"的笔调，通俗地阐发不动点定理的意义，并对同伦、同调、混沌、压缩映象等概念作了初等描述。因此，尽管不动点理论十分艰深，但是读者只要具有大专数学水平，本书是可以读懂的，而且饶有趣味。

Summary

This book is one of "a series of Appreciation of the Famous Mathematical Topics in World". The fixed point theorem is a very important topic in mathematical development of 20th century, which have profundly influenced all mathematics. The essential part of this book is to present the Brouwer fixed point theorem, from 1, 2, 3-dimension to n-dimension and infinite-dimension. At same time, it will involve a series of subjects such as mathematical analysis, topology and non-linear analysis. The authors interpret popularly the theory of fixed point with a appreciative style, and describe elementarily the concepts of homotopy, homology, chaos, contractive mapping etc. Therefore although the theory of fixed point is difficult to understand, this book will be grasped and interested for those who know college mathematics.

前 言

不动点理论是20世纪数学中的一支奇葩。半个多世纪以来，它一直是世界数学名家追逐的目标之一，其影响可以说遍及整个数学。

古老的代数方程求根，可以转化为不动点问题，设 $p(x)$是多项式，令 $g(x)=x-p(x)$，那么解方程 $p(x)=0$ 等于解 $g(x)=x$。若 x_0 满足 $g(x_0)=x_0$，即 x_0 是关于 $g(x)$ 的不动点，那么 x_0 正是方程 $p(x)=0$的根。

一般地考虑 $(-\infty, \infty)$ 上定义的连续函数 $f(x)$，那么 $g(x)=x-f(x)$的不动点也是$f(x)=0$ 的根。这时若取定 x_1，作迭代：

$$x_{n+1}=g(x_n) \qquad n=1,2,\cdots$$

如果 $\{x_n\}$ 收敛，例如 $x_n \to x_0$，那么由于 $g(x)$

也是连续函数，将有 $g(x_n)\to g(x_0)$，于是我们得到

$$x_0=g(x_0)$$

x_0 是 $g(x)$ 的不动点，x_0 于是成为 $f(x)=0$ 的根。

我们不妨看一个例子，设有二次方程 $x^2-4x-1=0$。将它改写为 $x=4+\frac{1}{x}$。今取 $x_1=4$，按迭代公式

$$x_{n+1}=4+\frac{1}{x_n} \qquad n=1,2,\cdots$$

我们有

$x_1=4$

$x_2=4.25$

$x_3=4.235294118$

$x_4=4.236111111$

$x_5=4.236065511$

……

$x_8=4.236067978$

$x_9=4.236067977$

在10位有效数字情形下，$x_{10}=x_8$，$x_{11}=x_9$。x_8 和 x_9 就近似地可看作 $x=4+\frac{1}{x}$ 的解，即函

数 $4+\frac{1}{x}$ 的不动点，于是 $x^2-4x-1=0$ 的近似根就得到了。

这种用迭代法求不动点的思想，当然早就有了，并非20世纪的产物。真正引人注目的不动点理论起源于荷兰数学家布劳威尔的工作。这位直觉主义数学哲学的创始人也是一位拓扑学家，1909年开始，他以《曲面上一对一的映为自身的连续映射》为题发表了一系列论文，创立了不动点理论。现在以他的名字命名的布劳威尔不动点定理（$n=2$）是：

平面内闭单位圆盘上映为自身的任何连续映射，至少有一个不动点。

这个定理惊动了整个数学界。它的假设甚少：任何闭单位圆盘上的映入自身的连续映射都行，可是结论十分明确、丰富：至少有一个不动点。其意义简直可以和高斯证明任何代数方程至少有一复根相比美。

这个定理很简单明了，但证明却相当麻烦。因为条件少，只有连续性的假设，所以微分积分一套工具用不上。你想沿用迭代法思想，可是 $f(x)$ 没有具体性质（仅知道 $|f(x)|\leqslant1$），不能判明 $x_{n+1}=f(x_n)$ 是否收敛。布劳威尔于是另辟

蹊径，将大数学家庞加莱研究常微分方程奇点时使用的拓扑学方法引过来，用基本群（同伦群）解决了这一课题（$n=2$情形）。

拓扑学的同伦和同调方法，是20世纪数学中的两个主要工具，不动点理论得力于它，同时也刺激它获得迅猛发展。本书在介绍布劳威尔定理证明时，从“欣赏”的角度介绍这两个基本工具，窥其一斑，也许可使不熟悉拓扑学的读者得以领略其概貌。

作为布劳威尔不动点定理的继续，美国数学家莱夫希兹在1923年发现了更深刻的不动点定理，现称为莱夫希兹不动点定理，这是一个新的高峰，我们将在第五部分中介绍它。这一定理还是解决不动点的有无问题。1927年，丹麦数学家尼尔森发表文章研究不动点个数问题，创始了不动点类理论，提出尼尔森数概念。截至1962以前，能够计算尼尔森数的映射只是很简单的情形，我国的江泽涵、姜伯驹、石根华等人大大推广了可计算尼尔森数的情形，并得出莱夫希兹不动点定理的逆定理，这是很好的工作。

不动点理论的另一个发展方向是不限于欧氏空间中多面体上的映射，而考察一般的距离空间或线性拓扑空间上的不动点问题。最先给出的结

果是波兰数学家巴拿赫，他于1922年提出的压缩映象原理发展了迭代思想。他将$x_{n+1}=f(x_n)$中的x_n可看成距离空间中的点列，f仍是这一空间上到自身的映射，如果f满足压缩条件

$$\rho(f(x),f(y))\leqslant\alpha\rho(x,y),\quad 0\leqslant\alpha<1$$

$\rho(x,y)$表示x与y之间的距离，那么f必有唯一的不动点，这一定理证明并不难，但用处极广，微分方程、函数方程、隐函数理论中的许多存在性与唯一性问题均可归结为此定理的推论。这一定理在所有泛函分析教科书中均有介绍，本书也将加以陈述。

大家知道，欧氏空间是有限维的线性赋范空间，我们能否在无限维空间的单位球上得出布劳威尔不动点定理？一般是不成立的，波兰数学家肖德尔证明了：线性赋范空间凸子集C到C上的紧映射至少有一个不动点。这一定理将连续映射的条件加强为紧映射，因而，运用紧映射可用有限秩映射逼近的结果获得了不动点定理的新进展，这一定理有多种推广和应用，我们也将在第四章加以介绍。

不动点理论进入70年代又别开生面。老掉牙的区间到区间的迭代　$x_{n+1}=f(x_n)$　$x_n\in[a,b]$，$n=1,2,\cdots$，出现了意想不到的结果。1973

年4月的一天，美国马里兰大学的研究生李天岩和他的导师约克偶然研究这个区间迭代，证明了以下事实，如果区间上映射 f 有3-周期点，则对任何正整数 n 都有 n 周期点（指经过 n 次迭代后回到原处，不动点是1-周期点）。这一结果发人深思：如有了周期点，则会出现乱七八槽的现象，这时你随便从一点出发迭代，不要说 x_n 收敛某一数做不到，而且 x_n 的规律完全无法知道，呈现出一片混沌（Chaos）景象。这是不动点理论不存在情形的发展。由于它是一维的，所需准备知识不多（只要单元连续函数知识即可），所以在第一部分就来叙述它。

阅读本书，我们假定读者已有微积分和高等代数的初步知识，另外还需一些点集拓扑的知识，比较重要的，我们在本书提到时都作了一些说明。如果读者还不清楚，可参阅文献[1][10][13]。

本书是一本“欣赏”数学名题的书，并非教材。所以我们不求处处严谨，而是尽可能讲清思想，剖析证明思路，介绍数学工具。但是这也不是一本“科普”读物，而是切实的数学作品。要真正读懂，得动一番脑筋，花一些气力。

作　者

1987年11月

目 录

前 言……………………………………………… 1

一 一维的布劳威尔不动点定理、周期不动点与混沌………………………………… 1

1. 一维的布劳威尔不动点定理………… 3

2. 连续函数的介值性定理是函数在区间上的整体性质……………………… 7

3. 单调函数的不动点定理………………13

4. n 周期点和昆虫种群方程……………17

5. 周期 3 则乱七八糟……………………25

6. 混沌现象的数学描述…………………30

二 基本群和二维布劳威尔不动点定理………33

1. 不动点性质……………………………35

2. 向量场…………………………………41

3．闭环路、基本群和布劳威尔定理……49
三 同调群与三维布劳威尔不动点定理……67
1．基本思想……69
2．R^3中子集的洞与同调群……74
3．例和说明……88
4．三维布劳威尔不动点定理的证明……90
5．几点附注……99
四 一般空间上的不动点定理…… 107
1．数学分析中的一个习题…… 109
2．距离空间上的压缩映射不动点定理…… 112
3．巴拿赫不动点定理的推广…… 116
4．希尔伯特空间上的非扩张映射…… 120
5．非扩张映射的不动点定理…… 125
6．线性赋范空间上的肖德尔不动点定理…… 133
五 莱夫希兹不动点定理和尼尔森数…… 141
1．莱夫希兹不动点定理…… 143
2．莱夫希兹定理的推论和推广…… 153
3．不动点个数问题和尼尔森数…… 158
六 进一步的结果和应用…… 173

1. 拓扑度的理论…………………………… 175
2. 不动点的计算…………………………… 184
3. 半序集上的不动点……………………… 187
4. KKM定理……………………………… 192
5. 整函数与半纯函数的不动点……… 197
6. 不动点定理的几个应用……………… 199

参考文献………………………………………… 205
外国人名索引…………………………………… 208

Contents

Preface 1
Chapter I The Brouwer Fixed point Theorem in One Dimension, the Teriodic Fixed Points and Chaos 1
1. The Brouwer Fixed Point Theorem in One Dimension...... 3
2. The Intermediate Value Theorem of a Continuous Function Is a Global Property in a Interval 7
3. The Fixed Point Theorem of Monotone Functions 13
4. n-Periodic Fixed Point and Insect Population Equation 17
5. Period Three Implies Chaos 25

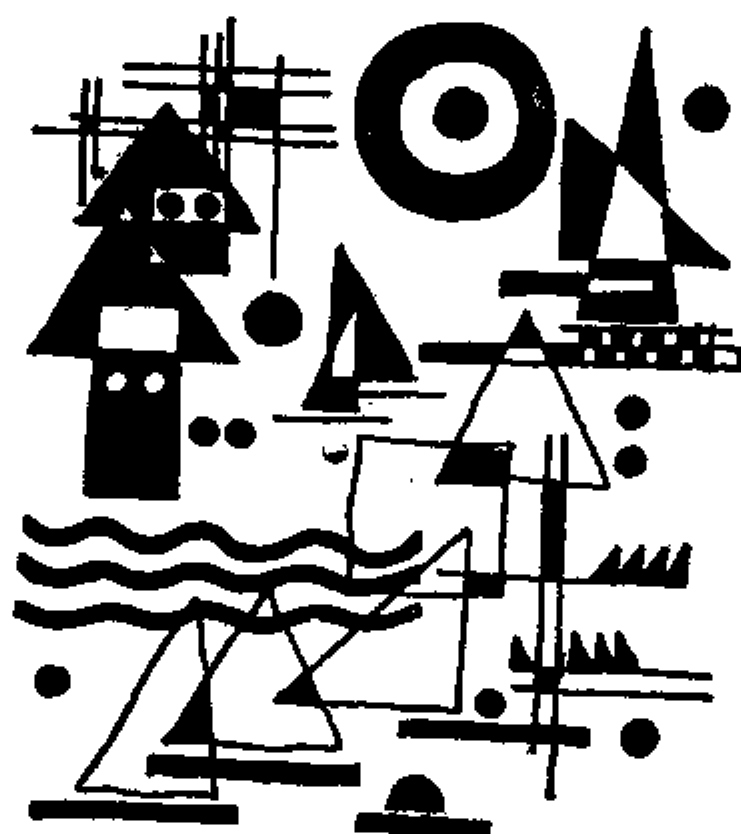
6. The Mathematical description of the Chaos ……………………30
Chapter II Fundamental Group and the Brouwer Fixed Theorem in Two Dimensions……………………33
1. Fixed Point Property ……………35
2. Vector Fields ……………………41
3. Closed Loops、Fundamental Group and the Brouwer Theorem ……………………………49
Chapter III Homology Group and the Brouwer Fixed Point Theorem in Three Dimensions………………67
1. Basic Idea…………………………69
2. The Holes of a subset in R^3. and Homology Group ……………74
3. Examples and Interpretations……86
4. The Proof of the Brouwer Fixed Point Theorem in Three Dimensions ……………………………90
5. Some Remarks ……………………99
Chapter IV The Fixed Point Theorem in General space …………………107
1. A Example Problem in Mathematical Analysis …………109

2. The Fixed Point Theorem of Contractire Mapping in Metric Space ············112
3. The Generalization of The Banach Fixed Point Theorem ···116
4. The Non-expansive maps in The Hilbert Space ············ 120
5. The Fixed Point Theorem of Nonexpansive Maps ············ 125
6. The Shauder Fixed Point Theorem in a Linear normed Space ············ 133
Chapter V The Lefschetz Fixed Point Theorem and the Nielsen Number ············ 141
1. The Lefschetz Fixed Point Theorem ············143
2. Some Corollaries and Generalization of the Lefschetz Theorem············ 153
3. The Number of Fixed Points and the Nielsen Number ·········158
Chapter VI Further Results and Applications ············173
1. Topological Degree Theory······ 175

2. Computation of Fixed Points ········ 184
3. Fixed Point in Semi-order Sets ········ 187
4. KKM Theorem ········ 192
5. The Fixed Points of Entire Functions and Meromorphic Functions ········ 197
6. Some Applications of Fixed Point Theorem ········ 199

References ········ 205
Index ········ 208

一 一维的布劳威尔不动点定理、周期不动点与混沌



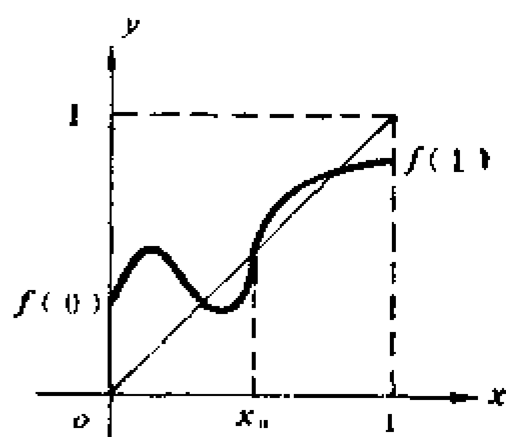
1. 一维的布劳威尔不动点定理

不需要任何高深的数学知识，仅凭常识就可判明以下这个最基本的最简单的不动点定理：

定理1.1 设 $f(x)$ 是定义在$[0,1]$上的连续函数，且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，则必存在 $x_0\in[0,1]$，使 $f(x_0)=x_0$。

证 作函数 $F(x)=f(x)-x$。如 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则0 或 1 即为定理要求的 x_0，定理已成立（此时将有 $f(0)=0$ 或$f(1)=1$）。由条件 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$知 $F(0)=f(0)\geqslant 0$，$F(1)=f(1)-1\leqslant 0$。故只需再在 $F(0)>0$和 $F(1)<0$的情形下证明定理。

由于 $f(x)$是连续函数，故 $F(x)$ 也是连续函数。因此当 x由0出发变到1时，$F(x)$ 将从正值 $F(0)$ 连续地变到负值 $F(1)$，所以必至少有一点 x_0，使 $F(x_0)=0$*)．这正是 $f(x_0)=x_0$。□



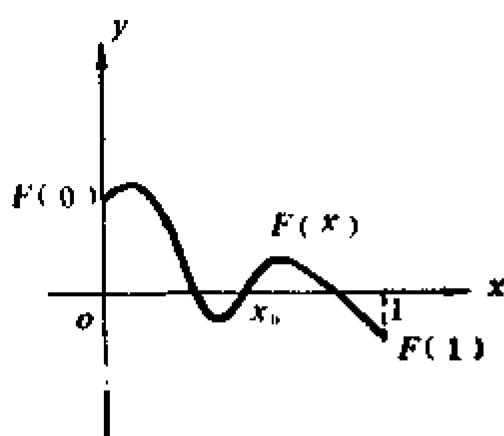


图1.

现在我们对这一定理作些说明。

（1）一个将某集A映到自身中的映射称为

*) 详见下节。

自映射．定理1.1中的 f 是集合 $[0,1]$ 上的自映射．

（2）设 f 是 A 上的映射，且值域 $f(A)\supset A$．若 $x_0\in A$，且 $f(x_0)=x_0$，则 x_0 称为 f 在 A 中的一个不动点．不动点不必唯一，如图 1.1 中就画了三个．

（3）本书中我们主要观察欧氏空间，数轴是一维欧氏空间 R^1，数轴上的点可和全体实数一一对应．数轴上两点 A 和 B 的距离定义为与这两点对应实数 a 和 b 之差的绝对值：

$$d(A,B)=|a-b|.$$

具有笛卡儿直角坐标的平面，是二维欧氏空间 R^2．平面上的点 P 和一对有序坐标 (x,y) 一一对应．平面上两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 之间的加法、数乘和距离分别定义为

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$\lambda(x,y)\quad(\lambda x,\lambda y)\qquad \lambda\ 是实数$$

$$d(P_1,P_2)=[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

同样可定义三维欧氏空间．它由三元有序数组 (x,y,z) 组成，和平面上类似地定义加法、数乘和距离．

一般地，我们定义 n 维欧氏空间 R^n 如下：R^n 由 n 元有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 所组成，其

中的加法，数乘和距离分别定义为

$$A+B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$
$$=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).$$
$$\lambda A=\lambda(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$
$$=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$$
$$d(A,B)=[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2]^{\frac{1}{2}}$$

其中 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

请大家注意，平面上的点A相当于位置向量$\overrightarrow{OA}$. 点的加法和数乘，相当于向量的平面四边形加法及向量的放大. 而点间距离，即相应向量之差的长度. 向量的乘法在这里不予讨论.

（4）R^n 中的单位球是指$\{x\in R^n;\ d(0,x)\leqslant 1\}$，记为 B^n，它的边界 ∂B^n 是 $n-1$ 维的球面，记为 S^{n-1}. 这样 R^1 中单位球是$[-1,\ 1]$，其边界是 S^0，由 $+1$和-1两点组成. R^2 中单位球 B^2 是单位圆盘D，边界 S^1 是单位圆周C. R^3中的单位球 B^3 即日常所说的半径为1的球，S^2 即通常的球面.

（5）定理1.1中的闭区间$[0,1]$可改为$[-1,\ 1]$，结论及证法均可不变. 这时定理1.1 可说成：

R^1中单位球B^1上的任何连续自映射必有不动

点。

（6）定理1.1 的证明中，有一处用了连续函数的性质，它的详细说明请见下一节。

2. 连续函数的介值性定理是函数在区间上的整体性质

读者如果稍微接触一下微积分，就会意识到函数性质有局部与整体之分。所谓局部性质是指函数在一点 x_0 附近的性态，例如在该点的极限、连续、可导等都是。这种局部性质只涉及该点任意小的邻域。所谓整体性质通常是指在一个固定区间上的性态，例如在区间上有界、单调、凹凸、有最大值最小值等等。这种整体性质涉及一个固定的区间，在讨论过程中不能任意变动。

微积分正是从研究函数局部性质入手，借助于一些基本定理，过渡到研究函数的整体性质。例如著名的拉格朗日中值定理，就是如此。它的条件是函数 $f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b)上可导，这里连续、可导都是函数局部性态，在 $[a,b]$上连续只是局部性质的总和并非整体性质，其结论是存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad a<\xi<b$$

这却是一个整体性质. 事实上, ξ 位于 (a,b)之间,并非那一点的邻域,$f(b)-f(a)$是区间 $[a,b]$两端点的函数值之差, 与 $[a, b]$ 密不可分. 特别是, 由中值定理可得出函数在区间上单调等整体性质, 大有用场. 这也正是拉格朗日中值定理的精髓. "分析入微"地研究局部性质, 才能深入揭露其整体性质. 不动点定理反映了函数的一种整体性质, 它的证明需要用到连续函数的介值性定理, 这也是一种整体性质, 让我们先来叙述这一定理.

定理1.2 (连续函数的介值性定理) 若$f(x)$是区间 $[a,b]$上的连续函数, $f(a)>0, f(b)<0$, 则必存在一点 c, 使得$f(c)=0$.

证明 通常用区间套定理, 取 $[a, b]$ 的中点$\frac{a+b}{2}$, 若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$,定理已证毕, 若它大于 0, 取 $[a_1, b_1]=\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, 若它小于 0, 则取 $[a_1, b_1]=\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. 再取$\frac{a_1+b_1}{2}$, 再视 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ 的正负取 $[a_2,b_2]$, 使得 $f(a_2)$

和 $f(b_1)$ 异号，这样一直下去，可得一列 $[a_n, b_n]$，$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$，$f(a_n)$ 与 $f(b_n)$ 异号，由区间套定理可得一点 c。我们可断言 $f(c)=0$。

如若不然，$f(c)>0$，则由 f 的连续性，可知存在一个邻域 $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$，$f(x)$ 在这邻域内也大于0，但是当 n充分大，$[a_n,b_n] \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$，而 $f(a_n)$ 与 $f(b_n)$ 异号．这是 $f(x)$ 在 $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ 内恒大于0矛盾，同样 $f(c)<0$ 也不能成立，故 $f(c)=0$。□

不难看出介值性定理是从“连续”（局部性质）的条件得出“介值”存在（整体性质）的结论．介值 c和整个区间 $[a,b]$有关，而不是某点邻域的局部问题．证明关键在于后半段，我们用区间套定理得出 c以后，$f(c)>0$ 和 $f(c)<0$都和连续函数在一点的保号性（局部性质）矛盾，故得 $f(c)=0$。这一证明说明了区间套定理将整体性质（介值性）和局部性质（保号性）连系起来，得到了圆满的结果，

现在我们再回过头来分析不动点定理．这定理的条件只要自映射连续即可，而连续是局部性质，它的结论是在$[0, 1]$ 中存在一个 x_0，满足 $f(x_0)=x_0$．这是关于区间$[0,1]$的整体性质．证明

中用了关于整体性质的介值性定理，而介值性定理又依赖于区间套定理，所以说区间套定理（或有限覆盖定理等与之等价命题）成为沟通连续（局部性质）与存在不动点（整体性）的桥梁。本书是专门写不动点定理的，因此从局部性质过渡到整体性质可说贯串于本书的始终。

我们把介值性定理写得更一般些

定理1.3 设$f(x)$在$[a,b]$连续，M，m分别是$f(x)$在$[a,b]$的最大值和最小值，对任何满足$m<l<M$的值l，总存在$c\in[a,b]$，使$f(c)=l$。

证 由于$f(x)$是$[a,b]$上连续函数，由最大最小值定理知，必有$f(\alpha)=M$，$f(\beta)=m$。$a\leqslant\alpha,\beta\leqslant b$。

不妨设$\alpha<\beta$（$\alpha>\beta$时同样考虑$[\beta,\alpha]$），考察$[\alpha,\beta]$上连续函数$F(x)=f(x)-l$。因$F(\alpha)=M-l>0$，$F(\beta)=m-l<0$，故由定理1.2，必存在一点c，使$F(c)=0$，即$f(x)=l$。
□

在这一节的最后，我们也将不动点定理中的自映射要求稍微放宽些，得到

定理1.4 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)$的值域包含了$[a,b]$，则$f(x)$在$[a,b]$中必至

少有一个不动点，

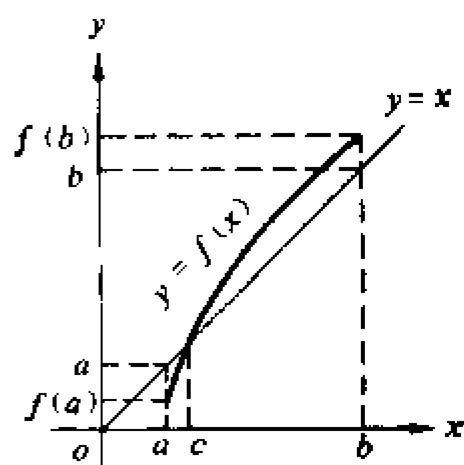
证 因为 $f(x)$ 的值域包含了 $[a,b]$，所以必有 x_1，x_2，使 $f(x_1)\leqslant a$，$f(x_2)\geqslant b$，$a\leqslant x_1\leqslant b, a\leqslant x_2\leqslant b$。作 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x_1)=f(x_1)-x_1\leqslant 0$，$F(x_2)=f(x_2)-x_2\geqslant 0$。由定理1.2知必有 $x_1\leqslant c\leqslant x_2$ 使 $F(c)=0$，即 $f(c)=c$。□

定理1.4 稍加改变即可得今后常用的另一形式：

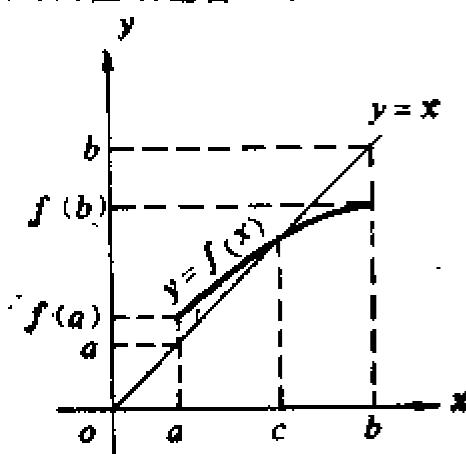
定理1.5 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)$的值域含于 $[a,b]$之中，则 $f(x)$在$[a,b]$ 中必至少有一个不动点。

证明和定理1.1 类似，此时 $f(a)\geqslant a$，$f(b)\leqslant b$，故令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(a)\geqslant 0$，$F(b)\leqslant 0$，由定理1.2知必存在 c，使 $F(c)=0$，$a\leqslant c\leqslant b$，此时 c 即为 $f(x)$的不动点。□

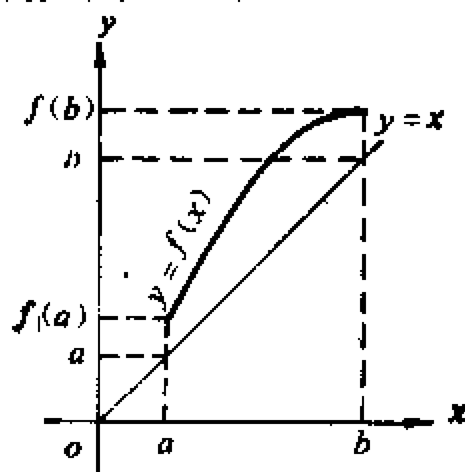
综上所述，在 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$，或者值域包含 $[a,b]$，或者值域含在 $[a,b]$中，均存在不动点，在其它情形则不一定有不动点（参见图 1.2 a)，b)，c))。



a) f(x)的值域包含〔a,b〕，有一不动点 c



b) f(x)，的值域含于〔a,b〕之中，有一不动点 c



c) f(x)的值域既不含于〔a,b〕也不包含〔a,b〕没有不动点

图1.2

3．单调函数的不动点定理

前两节我们讨论的对象是连续函数的不动点，所用的工具是连续函数的介值性定理．这一节我们将研究单调函数的不动点存在定理．

定理1.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有定义的单调不减函数，其值域含在 $[a,b]$ 之中，则 $f(x)$在 $[a,b]$ 至少有一不动点．

证明 让我们考察集合

$$S=\{x\in[a,b]\mid x\leqslant f(x)\}$$

由于 $f(x)$的值域含在 $[a,b]$ 中，故 $a\leqslant f(a)$，这说明 S非空．记 α为集 S的上确界．显然 $a\leqslant\alpha\leqslant b$．我们证明 α 是 $f(x)$ 的不动点，即 $\alpha=f(\alpha)$．

先证 $\alpha\leqslant f(\alpha)$．任取 $x\in S$，即 $x\leqslant f(x)$．因 $x\leqslant\alpha$．$f(x)$单调不减，故 $f(x)\leqslant f(\alpha)$，于是

$$x\leqslant f(x)\leqslant f(\alpha),$$

（对任何 $x\in S$均成立）

这表明 $f(\alpha)$是 S 的一个上界，α 是 S的上确界，所以 $\alpha\leqslant f(\alpha)$．

再证 $f(\alpha)\leqslant\alpha$．由于 $f(x)$的值域含于$[a,b]$中，故 $f(b)\leqslant b$．再由 $a\leqslant\alpha\leqslant b$ 及 $f(x)$的单调

不减性，可得

$$a\leqslant f(a)\leqslant f(\alpha)\leqslant f(b)\leqslant b$$

从而 $f(\alpha)\in[a,b]$。前已证 $\alpha\leqslant f(\alpha)$。据 $f(x)$ 的单调不减性可知，$f(\alpha)\leqslant f(f(\alpha))$，这表明 $f(\alpha)\in S$，但 α是 S 的上确界，故 $f(\alpha)\leqslant\alpha$。

总起来，可知 α是 $f(x)$ 的不动点，由证明可知 α还是 $f(x)$的最大不动点，如令 $s'=\{x\in[a,b]|\ x\geqslant f(x)\}$，记 β为 S' 下确界，同理可证 β 是 $f(x)$ 的最小不动点。□

注意，这里我们不能将定理1.6中 $f(x)$单调不减的条件换成单调不增，例如[0,1] 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 0 & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

是单调不增，它没有不动点。从图形上看，它和 $y=x$没有交点。

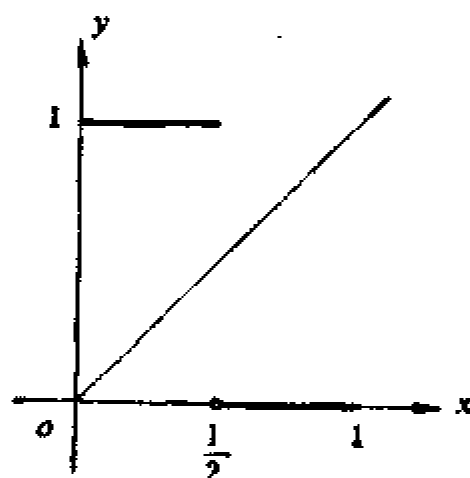


图1.3

在引言中我们曾提到过，函数 $f(x)$ 的不动点的存在问题，与迭代过程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的收敛性有密切关系。对于 $[a,b]$ 上的自映射 $f(x)$，若再假定 f 连续虽可判定存在不动点，但迭代序列 x_n 却未见得收敛。如果再假定 $f(x)$ 是单调不减的，那么就有

定理1.7 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，值域含于 $[a,b]$ 中，而且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续和单调不减，则对初始值 $a_0=a$，

$$a_n=f(a_{n-1})\qquad n=1,2,\cdots$$

必收敛于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的最小不动点。若令 $b_0=b$，则迭代序列 $b_n=f(b_{n-1})$ 收敛于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的最大不动点。

证明 $f(x)$ 此时必有不动点，任取其一为 r^*，$a\leqslant r^*\leqslant b$。由于 $f(x)$ 单调不减及 $f(x)$ 值域在 $[a,b]$ 中，可知

$$a_0\leqslant f(a_0)\leqslant f(r^*)=r^*\leqslant f(b_0)\leqslant b_0$$

即 $$a_0\leqslant a_1\leqslant r^*\leqslant b_1\leqslant b_0$$

再由 $a_1=f(a_0)\leqslant f(a_1)=a_2\leqslant r^*$，$r^*\leqslant f(b_1)=b_2\leqslant f(b_0)=b_1$

可知 $$a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant r^*\leqslant b_2\leqslant b_1\leqslant b_0$$

反复作下去，即得

$$a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$$

$$\leqslant r^* \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b_0$$

用单调有界实数列必有极限的定理可知$a_n \to a^*$，$b_n \to b^*$，且 $a^* \leqslant r^* \leqslant b^*$。由于 $f(x)$是连续函数，从

$$a_n = f(a_{n-1}), \quad b_n = f(b_{n-1}),$$
$$n = 1, 2, \cdots$$

可知 $a^* = f(a^*)$，$b^* = f(b^*)$，即a^*，b^*都是$f(x)$的不动点，由于 r^* 是 $f(x)$ 任一个不动点，故 a^*，b^*分别是 $f(x)$ 的最小和最大的不动点。□

下面作两点说明。第一，为了保证 $a_n \to a^*$，可以只要求 $f(x)$在 $[a, r^*)$上单调不减，不要要求 $f(x)$在 $[a, b]$ 单调不减。第二，严格单调增加的连续函数如果有根则只有唯一的根，但严格单调增加的连续函数可以有不止一个的不动点。

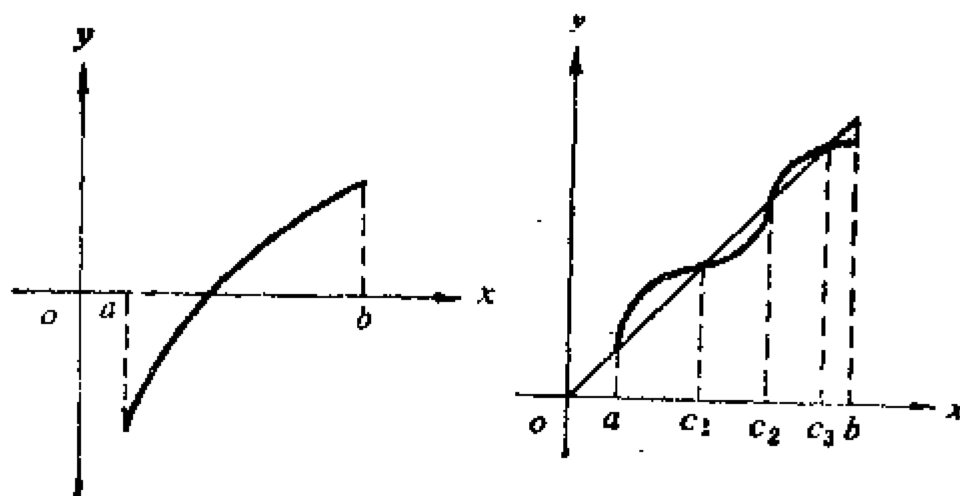


图1.4

从图形上看，这是因为前者是和横轴的交点，后者是和 $y=x$ 的交点，$y=x$ 本身也是单调增加函数，和 $y=x$ 相交与否与 $f(x)$ 增加的速度有关。

4. n 周期点和昆虫种群方程

夏日的蝉是年年有的，但其中品种繁多。有一种17年蝉，成虫只活几个星期。它们产下大量的卵，孵化为幼虫后钻入地下，附在小根上吸取营养，就在那里度过17年。因此，17年蝉每隔17年大量出现一次。13年蝉也是13年后大量出现一次。这两种蝉都是单一世代，两代间没有重迭，至于 7 年蝉、4 年蝉和 3 年蝉则是每年都有的，并非单一世代。

描写昆虫种群，可以通过迭代方程来描述。如以 x_n 表示第 n 年的虫口数，则可用一函数 $f(x)$ 推算出 $x_{n+1}=f(x_n)$，数学上较易处理的是由函数 $\lambda x(1-x)$ 作成的迭代：

$$x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n),\qquad n=0,1,2,\cdots$$

其中参数 λ 满足关系式 $0\leqslant\lambda\leqslant4$。

在蝉的迭代关系 $x_{n+1}=f(x_n)$ 中，若 x_0 为

17年蝉大量出现的虫口数，则经过17次迭代后 $x_{17}=f(x_{16})=f(f(x_{15}))=\underbrace{f\cdots f}_{17个}(x_0)=x_0$。我们以后将 f的 n次复合简记为 f^n。于是x_0是f^{17}的不动点：$f^{17}(x_0)=x_0$，我们也把 x_0 称为 f的17周期点。

一般地，我们有如下定义。

定义 设有函数 $y=f(x)$，用 f^n 表示 f的 n 次复合，即 $f^n(x_0)$是 x_0 经 n 次迭代后的数值，如 $f^n(x_0)=x_0$，即 x_0 是 f^n 的不动点，但不是 $f^m(m<n)$的不动点，则称 x_0 为 f的 n周期点。f 的不动点即1周期点。设 f 是可微函数，x_0 是 n 周期点，则当$\left|\frac{d}{dx}(f^n)\right|<1$ 时称 n 周期点是稳定的。

请注意，所谓 x_0 稳定，是指在 x_0 附近的任何值，经迭代后仍趋向于 x_0，即具有“吸引”周围点的特征。$\left|\frac{d}{dx}(f^n)\right|<1$ 是具有这一特征的一个判定准则。由复合函数求导法则知

$$\frac{d}{dx}(f^n)(x_0)=f'(x_0)\,f'(x_1)\cdots f'(x_{n-1}),$$

$$n=1,2,\cdots$$

特别地，若 n 周期点 x_0 还能使 $f'(x_0)=0$，则也使$\left(\frac{d}{dx}f^n\right)(x_0)=0$，即$x_0$是稳定的。

下面我们来分析迭代关系 $x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n)$，当λ取不同值时的情况。

（1）$0<\lambda<1$. $f(x)=\lambda x(1-x)$ 的不动点满足方程

$$x=\lambda x(1-x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

解之得$x^*=0$ 及 $x^*=1-\frac{1}{\lambda}$。此时 $x^*<0$，不合要求，故 $f(x)$ 只有唯一不动点 $x^*=0$。$|f'(0)|=\lambda<1$，故0是稳定的。

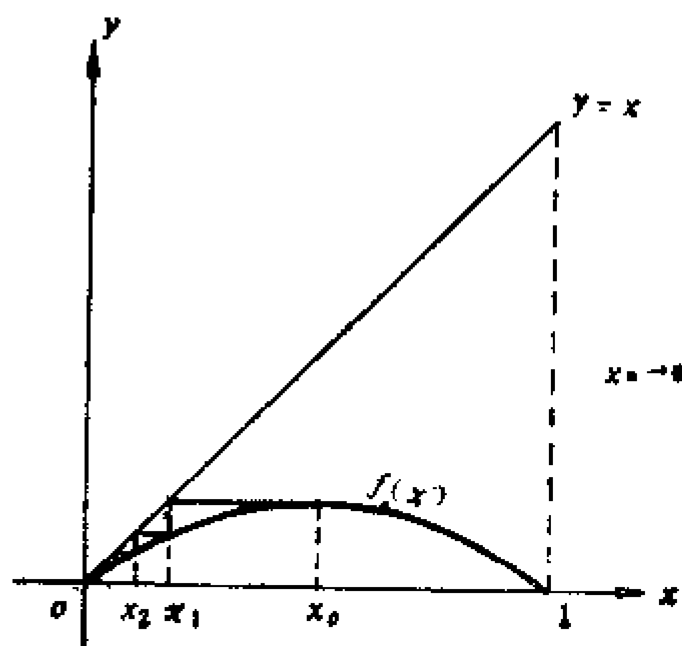


图1.5

（2）$1<\lambda<3$。

此时 $x^{\#}=0$ 和 $x^{*}=\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)$ 仍为 f的不动点，其中0是不稳定的，$1-\frac{1}{\lambda}$是稳定的，$f'\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)=2-\lambda$，当 $1<\lambda<3$ 时，其绝对值小于1．

我们稍为仔细些加以分析。$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 达到极大值$\frac{\lambda}{4}$，因 $0\leqslant\lambda\leqslant4$，故 $f(x)$ 值域在[0,1]中，因而由布劳威尔定理可知确有不动点。实际上算出的是上述两个，我们说 $1-\frac{1}{\lambda}$是稳定的不动点，是指任何初值 $x_0\neq0$，经过迭代都会收敛于 $1-\frac{1}{\lambda}$（如图1.6）故 $1-\frac{1}{\lambda}$ 是稳定的，而 $x=0$虽是不动点，但不稳定。因0附近点x_c，只要$x_c\neq0$，经迭代后都被吸引到$1-\frac{1}{\lambda}$，所以我们也称 $1-\frac{1}{\lambda}$是吸引子。而 $x=0$ 称为排斥子。

当 $\lambda=3$ 时， $f'\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)=-1$，

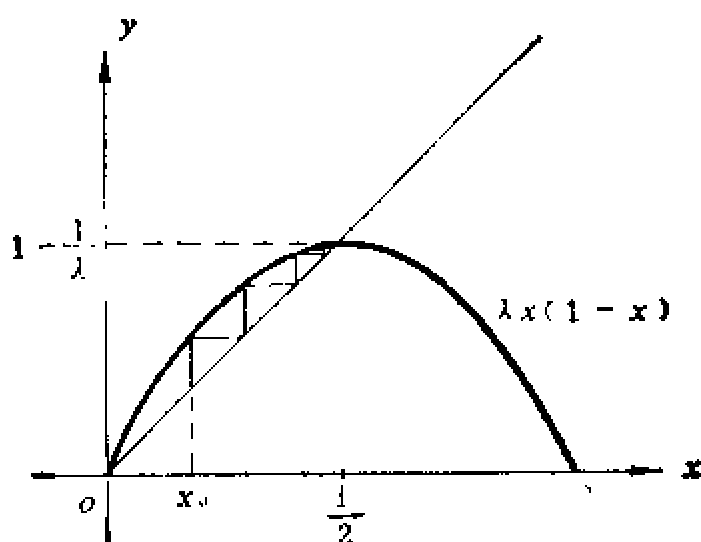


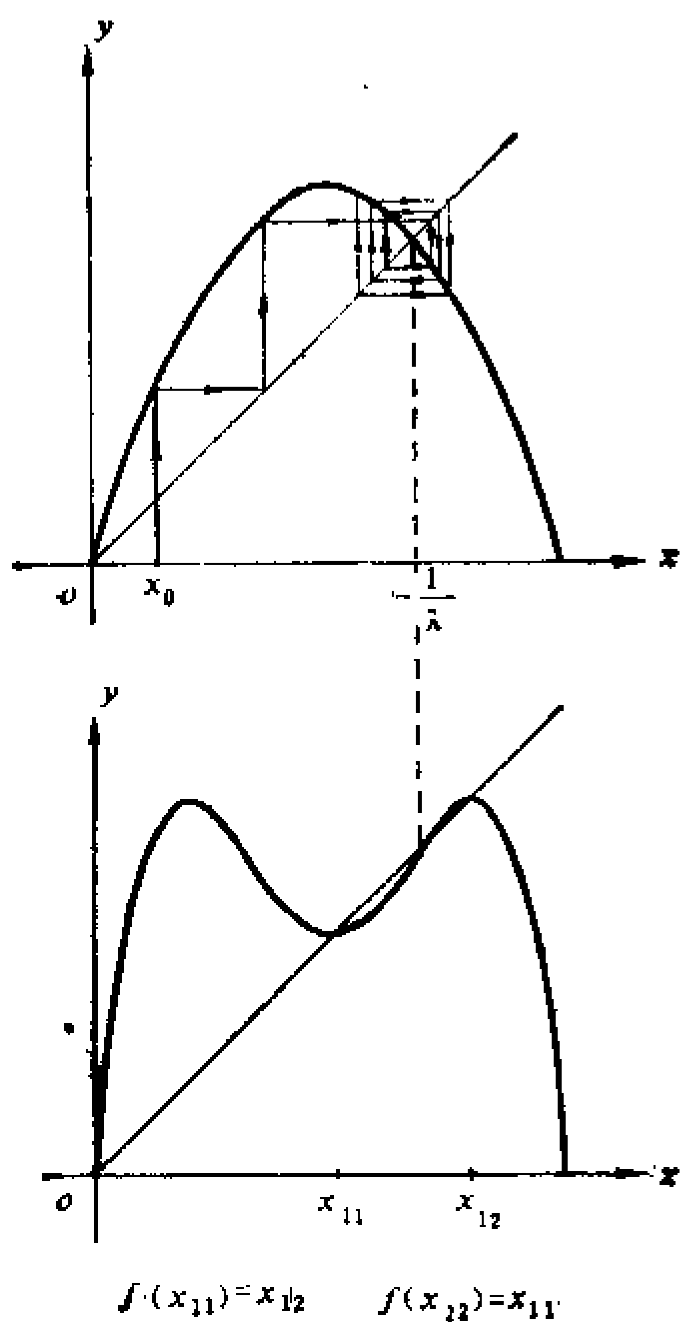
图1.6

不动点的稳定性遭破坏。$\lambda=3$是破坏解稳定性的突变参数。

（3）$3<\lambda<1+\sqrt{6}\approx3.449$

此时 $f(x)=\lambda x(1-x)$在$[0,1]$ 仍有两不动点：0 和 $1-\frac{1}{\lambda}$，但都不稳定，$\left|f'\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right|=|2-\lambda|>1$。

考虑二次迭代关系 $f^2(x)=f(f(x))=\lambda^2x(1-x)[1-\lambda x(1-x)]$。令 $x=f^2(x)$，解之得f^2的不动点有四个。0 和 $1-\frac{1}{\lambda}$ 仍是 f^2 的不动点。此外还有



$f(x_{11})=x_{12}$ $f(x_{12})=x_{11}$

图1.7

$$x_{11},x_{12}=\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda\pm\sqrt{(\lambda+1)(\lambda+3)})$$

这说明当 $\lambda>3$ 以后，不动点 $1-\frac{1}{\lambda}$失稳，化为两个2周期点，如图1.7. 从初值 x_0开始迭代，到 $1-\frac{1}{\lambda}$附近时，迭代过程围绕$\left(1-\frac{1}{\lambda},\right.$ $\left.1-\frac{1}{\lambda}\right)$这点向外发散地转圈，直到$x_{11}$和$x_{12}$ 时，出现二阶循环，即 $x_{11}\underset{f}{\overset{f}{\rightleftarrows}} x_{12}$ 时为止. 所以f^2的四个不动点中，两个是1周期点，都不稳定，两个是2周期点，都稳定.

如取 $\lambda=3.2$，则 $x_0^*=1-\frac{1}{\lambda}=0.6875$，且有 $x_{11}=0.5130, x_{12}=0.7995$. 0和 x_0^*是不动点（1周期点），它们不稳定. x_{11}和x_{22}都是稳定的.

（4）$1+\sqrt{6}<\lambda<3.544$

这时将会出现4周期点，例如取 $\lambda=3.5$，则4周期点为

$$\begin{array}{ccc} 0.3828 & \longrightarrow & 0.8269 \\ \uparrow & & \downarrow \\ 0.8750 & \longleftarrow & 0.5009 \end{array}$$

随着 λ的增长，f 的周期点个数不断增加，这种一分为二，二分为四的过程，称为分歧过

程．参数 $\lambda=3$ 是一分为二分歧值，$1+\sqrt{6}$ 是二分为四的分歧值，可以算出，$\lambda=3.544, 3.564$ 分别是四分为八，八分为十六的分歧值．这种分歧没完没了．当 $\lambda=3.569945672\cdots\cdots$时，出现周期为∞的解即非周期解，此时即进入混沌状态．任何初值的迭代都不收敛于有限的吸引子，x_n可以在整个[0,1]上游荡，好象布朗运动那样可以随机地出现在任何位置上．$f(x)$ 虽然连续，但相隔很近的两个初值 α、β 经若干次迭代后可以相差很远，但也可能相差不远，似乎无规律可循．这种由一个很普通的确定性的函数 $y=\lambda x(1-x)$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0<\lambda<4$，可以导出某种随机现象，这自然是一个很深刻的发现．确定性数学和随机现象的数学之间存在着内在的有机联系，一个确定的非线性系统可以没有任何随机因素的条件，却有一个随机的输出，我们不禁慨叹大自然规律的神奇．

事情尚未到此完结，70年代末期，美国康奈尔大学的菲根鲍姆从上述的迭代过程中发现了普适常数4.669201629…，请看表1．

菲根鲍姆对许多迭代函数进行大量的计算，都得到4.669201629… 这个数，这决非巧合．尽管目前还不清楚这个数的本质，但学术界倾向于

表1 周期倍化分岐中间距比值变化情况

$$f(x)=\lambda x(1-x)$$

m	分歧情况	分歧值	间距比值 $\frac{\lambda_m-\lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1}-\lambda_m}$
1	1分为2	3	
2	2分为4	3.449489743	4.751466
3	4分为8	3.544090359	4.656251
4	8分为16	3.561407266	4.668242
5	16分为32	3.568759420	4.66874
6	32分为64	3.569691610	4.6691
⋮	⋮	⋮	⋮
∞	混沌	3.569945972	4.669201629

认为它是自然界中的普适常数，此即著名的菲根鲍姆常数。

现在世界上至少有几千名学者热衷于混沌理论，期望这一现象的研究会揭示宇宙的奥秘。

5. 周期3则乱七八糟

让我们回到数学上来。1974年4月的一天，美国马里兰大学的博士研究生李天岩走进他的导师——约克教授的办公室，约克随口对李天岩说“试试区间迭代怎么样？”一个星期以后，李天岩证明了如下结果：

定理1.8 若 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续自映射，且有一个 3 周期点，则对任何正整数 $n>3$，都有 n 周期点。

这一定理看上去很简单，李天岩和约克联名向美国数学月刊投稿。这是一本中级数学杂志，1975年出版的第82卷 pp985—992 上登了出来。题目是 Period Three Implies Chaos，按李天岩本人的译法就是《周期 3 则乱七八糟》。这篇不起眼的小文章，由于通俗易懂，读者很多，物理学家也接受了。随之而来的便是 Chaos 热(Chaos 现在通译为混沌)。现在，它已发展为研究混沌现象（湍流、分形）的基础理论了。

这一定理的结论很简单，但并不直观。试看图1.8 中的函数，它显然有一个 3 周期点 o：

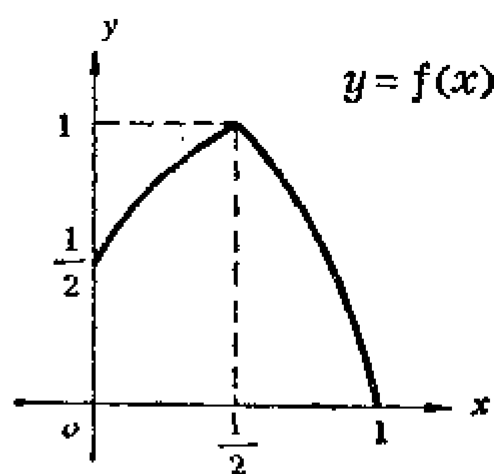


图1.8

$f(0)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$f(1)=0$。但你能看出来它会有4周期点、5周期点以至对任意$n$的$n$周期点？显然这不是靠直观能办到的事，必须用数学方法严格证明。

为了证明定理1.8，我们先证明以下辅助命题：

命题：设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，Δ_0，…，Δ_{n-1}是$[a,b]$中的n个闭子区间。若$f(\Delta_0)\supset\Delta_1$，$f(\Delta_1)\supset\Delta_2,\cdots,f(\Delta_{n-2})\supset\Delta_{n-1}$，并且$f(\Delta_{n-1})\supset\Delta_0$，则$f^n$至少有一个不动点$x_0$（$x_0\in\Delta_0$）且$f^k(x_0)\in\Delta_k$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$。（$f(\Delta)$表示函数$f$在$\Delta$上的值域）

证明　记$\Delta_0=(a_0,b_0)$，则因$f(\Delta_{n-1})\supset\Delta_0$，由介值性定理可知存在$a_0^*,b_0^*\in\Delta_{n-1}$，使得$f(a_0^*)=a_0$，$f(b_0^*)=b_0$。仍由介值性定理可知$f((a_0^*,b_0^*))=\Delta_0$。记$\Delta^*_{n-1}=(a_0^*,b_0^*)\subset\Delta_{n-1}$则有$f(\Delta^*_{n-1})=\Delta_0$。再看

$$f(\Delta_{n-2})\supset\Delta_{n-1}\supset\Delta^*_{n-1},$$

同理可证存在$\Delta^*_{n-2}\subset\Delta_{n-2}$，使$f(\Delta^*_{n-2})=\Delta^*_{n-1}$。依此类推，可知有一列闭子区间$\Delta^*_k\subset\Delta_k$　$k=0,1,2,\cdots,n-2$。使

$$\begin{cases} f(\Delta_k^*) = \Delta^*_{k+1} \subset \Delta_{k+1} & k=0,1,\cdots,n-2 \\ f(\Delta^*_{n-1}) = \Delta_0 \supset \Delta_0^* \end{cases}$$

这表明 Δ_0^* 经 n次 f 的复合得

$$f^n(\Delta_0^*) = f(\Delta^*_{n-1}) = \Delta_0 \supset \Delta_0^*$$

由定理1.4知存在 $x_0 \in \Delta_0^*$，使 $f^n(x_0) = x_0$，此即证明了 f^n 在 Δ_0 中有不动点 x_0。仍由 $f^k(\Delta^*_0) = \Delta^*_k$，知 $f^k(x_0) \in \Delta_k^* \subset \Delta_k$，这就证明了命题。

现在我们来证明李天岩和约克的定理 1.8.

证明 因 f 有 3 周期点，我们不妨设存在 $x_0 < x_1 < x_2$，满足 $f(x_1) = x_0$，$f(x_0) = x_2$，$f(x_2) = x_1$。记 $\tilde{\Delta}_0 = [x_0, x_1]$，$\tilde{\Delta}_1 = [x_1, x_2]$。由介值性定理知 $f(\tilde{\Delta}_0) \supset [x_0, x_2] \supset \tilde{\Delta}_0$，$f(\tilde{\Delta}_0) \supset \tilde{\Delta}_1$，而且 $f(\tilde{\Delta}_1) \supseteq [x_0, x_1] = \tilde{\Delta}_0$。在辅助命题中取

$$\begin{cases} \Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_{n-2} = \tilde{\Delta}_0 \\ \Delta_{n-1} = \tilde{\Delta}_1 \end{cases}$$

则知存在 $x_0 \in \Delta_0$，是 f^n 的不动点，且 $f^k(x_0) \in \tilde{\Delta}_0$ $0 \leqslant k \leqslant n-2$，$f^{n-1}(x_0) \in \tilde{\Delta}_1$。现在只须再证 x_0 不是 $f^m(m<n)$的不动点。事实上我们可证明 x_0，$f(x_0)$，…，$f^{n-1}(x_0)$ 是两两不同的。如若不然，$f^{n-1}(x_0)$ 是 x_0，$f(x_0)$，…，$f^{n-2}(x_0)$ 中之一个。则由 $f^k(x_0) \in \tilde{\Delta}_0$ $0 \leqslant k \leqslant n-2$ 可知 $f^{n-1}(x_0) \in \tilde{\Delta}_0$，但 $f^{n-1}(x_0) \in \tilde{\Delta}_1$，故 $f^{n-1}(x_0) \in$

$\widetilde{\Delta}_1 \cap \widetilde{\Delta}_0 = \{x_1\}$，于是

$$x_0 = f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0))$$
$$= f(x_1) = x_2 \notin \widetilde{\Delta}_0$$

这和 $x_0^* \in \widetilde{\Delta}_0$矛盾。这样我们就完全证明了定理1.8。□

有了这条定理，我们就知道图1.8这样简单的函数通过迭代竟可存在任意重的周期点，直观上难以置信。却又是不可辩驳的事实。

李天岩和约克的文章发表后，人们发现这个结果只是苏联学者沙可夫斯基一个定理的特例。早在60年代中期，沙可夫斯基在《乌克兰数学杂志》16卷（1964）上发表了一个深刻的结果：

定理1.9 若$f(x)$是线段I上的连续自映射，且 f有 m 周期点。如果 n 按沙可夫斯基序大于m，则 f有n周期点。

其中自然数的沙可夫斯基序是指如下的先后排列：

$$3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2n+1,\ 2n+3,\ \cdots$$
$$2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 7,\ \cdots,\ 2(2n+1),\ 2(2n+3),\ \cdots$$
$$2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ 2^2\cdot 7,\ \cdots,\ 2^2(2n+1),\ 2^2(2n+3),\ \cdots$$
$$\cdots\qquad\cdots$$

$$2^m\cdot 3,\ 2^m\cdot 5,\ 2^m\cdot 7,\ \cdots,$$
$$2^m(2n+1),\ 2^m(2n+3),\ \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$2^l,\ 2^{l-1},\ \cdots,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$$

这个次序是说，先排从3开始的所有奇数，然后这些奇数的2倍，2^2倍，…2^m倍，…，最后一行是2^l（$l=0,1,2,\cdots$）按降幂排列。

这样，3是沙可夫斯序列的第一个数，任何正整数n都会在沙可夫斯基序列中出现。这正说明，李一约克定理是可沙夫斯基定理的特例。

沙可夫斯基定理的证明并不太难，只用初等的工具。有兴趣读者可参看文献[8][9]。

6. 混沌现象的数学描述

李—约克论文中的定理已经是沙可夫斯基定理的特例，在数学上似乎不那么重要了。但是李—约克的主要功绩在于提出了混沌的概念，而且引起了物理学家的注意。

定义（混沌现象）闭区间I上的连续自映射$f(x)$，如果具有下列条件，称f产生混沌现象：

1. f的周期点的周期无上界。

2. 存在I的不可数子集S，满足：

1° 对任意$x,y\in S$，当 $x\neq y$时有

$$\limsup_{n\to+\infty}|f^n(x)-f^n(y)|>0$$

2° 对任意 $x,y\in S$ 有

$$\liminf_{n\to+\infty}|f^n(x)-f^n(y)|=0$$

3° 对任意 $x\in S$和 f的任一周期点 y，有

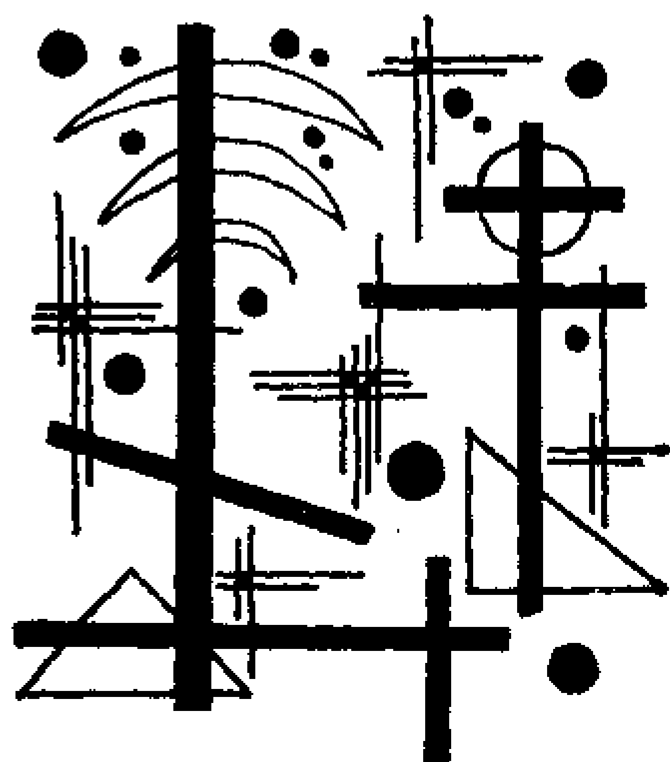
$$\limsup_{n\to+\infty}|f^n(x)-f^n(y)|>0$$

从定义可以看出，S 中的两点 x,y 经迭代后不会彼此越来越靠近（上确界大于0），也不会越来越分离（下确界为0），即忽分忽合，呈现一片混乱状态。李—约克的论文证明了，若f有3周期点，则 f 一定会产生混沌现象。这个结论引起了世人的惊奇。

混沌是古人想象中世界开辟以前的无序状态。盘古开天地，清者上浮为天，浊者下沉为地，终于形成天地分明的上下有序状态。这种现象物理世界中常常会遇到。满天乌云，滚滚浓烟，江河中的紊流，冬天凝结的冰花，杂乱无章，混沌而无序。然而一切有序是从无序中产生出来的。康德的星云说揭示太阳系是由混沌弥漫的星云而发展起来的。人们研究无序向有序的转化乃是一件重大的科学探索。如果说以前只是定性的描述，那么现在已能进行定量地研究。对

$f(x)$ 整体性质的研究出现数学理论，而计算机的迭代则提供了实验手段。在未来的岁月，混沌现象的奥秘必将进一步被揭开。无序与有序之间的辩证法将使人们在认识世界的长河中达到新的境界。

二　基本群和二维布劳威尔不动点定理



1. 不动点性质

在第一部分中我们讨论了一维空间R中的一些不动点定理，现在转向二维和三维的情形。类似于一维的情形可以说：设 $X \subset R^n$，f 是 X 的自映射，若存在 $x_0 \in X$ 使 $f(x_0) = x_0$，则称x_0为映射 f的不动点，f 为具有不动点的映射。如第一章所说，映射具有不动点是一个整体性质，它既与X 有关，也与 f紧密相联，试看以下两例。

例 1　设 B^2 为平面上的单位圆盘，$f: B^2 \to B^2$为以其圆心为对称中心的对称变换，可以看出圆心是 f的不动点。又设C是平面上的圆环（即平环），$g: C \to C$也是以圆心为中心的对称变换，显然 g 是没有不动点的。虽然这两个映射 f 与

g 是相同的，由于 B^2 与 C不同，导致不动点存在上的不同整体性质，这反映了 B^2 与C 具有不同的性质。

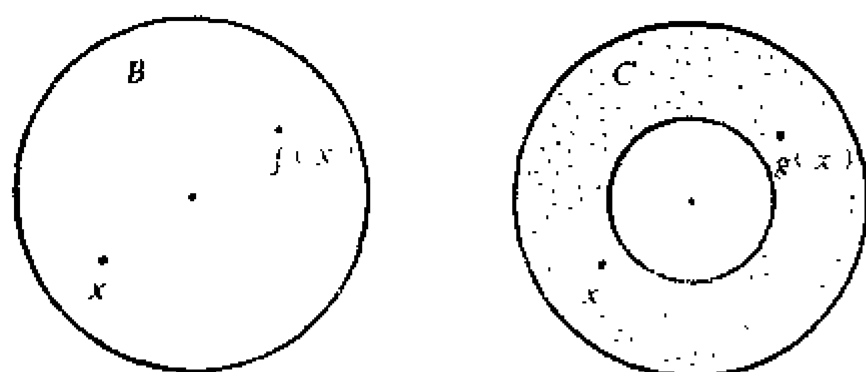


图2.1

例 2 取空间 R^3 中的单位球面S^2，将S^2绕通过南北极的直径旋转 α 角，$0<\alpha<\pi$，记 S^2 的这一自映射为 f，显然 f具有两个不动点（南极和北极）。如将 S^2的点经映射 f 后，再将每个点映到各自的对径点，记这自映射为 g，则 g 不存在不动点，这反映了S^2的两个自映射 f 与g 具有不同的性质。

现在再看一个例子。

例 3 设 X 是平面上的一个无边界的正方形，如 $X=\{(x_1,x_2)|\ 0<x_1,x_2<1\}$。作$X$ 的自映射 f：将X 的每一点沿其到 Ox_2 轴的垂线方向缩短到 Ox_2 轴的一半距离（见图2.3）。由于

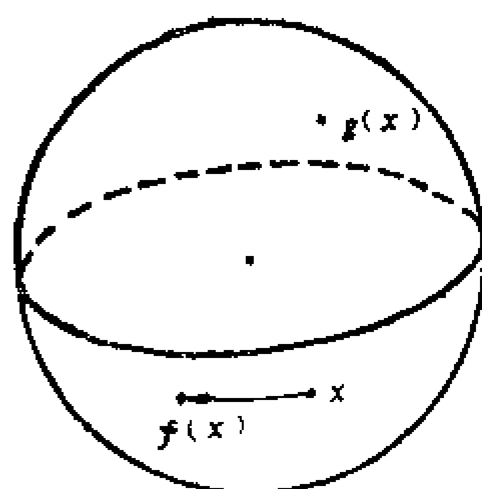


图2.2

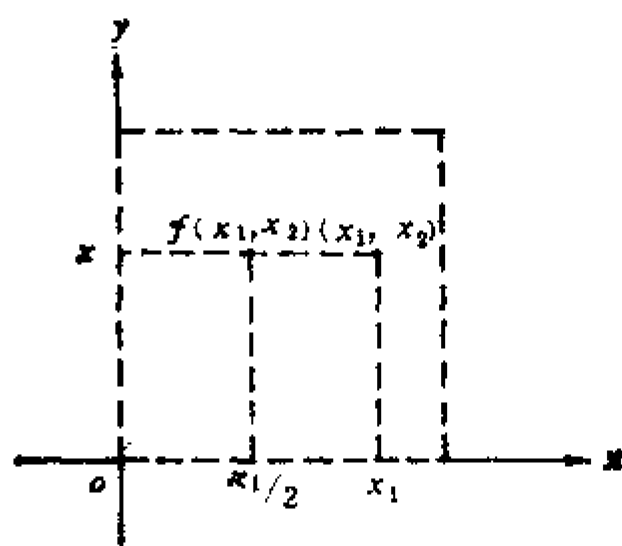


图2.3

X 没有边界，因而X的每个点都改变了它的位置，即 f没有不动点，映射 f可表示为：

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1/2 \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 \end{cases}$$

即 $$f(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{2},\ x_2\right)$$

其不动点方程 $x = f(x)$ 为

$$\begin{cases} x_1 = x_1/2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

它在X上无解，即 f 无不动点。

由例 3 可知，对于一些简单的自映射，可以通过几何直观判断其是否具有不动点，显然这是极为局限的，也可由变换式列出不动点方程，通过解方程(或判断方程解的存在性)来确定不动点的存在与否。然而对于不少的自映射的不动点的问题，不仅不能直观判断，甚至连其不动点方程 $f(x) = x$ 解的存在性也无法可知，因此必须另辟蹊径。实际上正是基于这一点，不动点理论才成为许多数学家追逐的目标，他们从各种角度通过不同方法去探求不动点的存在问题，又将得到的结果运用到方程解存在问题等各种领域，从而使不动点理论成为数学中一个五彩缤纷的万花筒。研究的方法一种是对自映射 f 附加以一定的条件，如定理1.1 中对映射加上"连续"的假设，定理1.6的 f 限制于"单调不减"，又如对球面 S^3 的自映射加上"连续"和"每一点不映为对径点"的条件，则必有不动点（见第五部分）。

另一种是对空间X附加条件，如本节例3中的X改为闭正方形，则该f就具有不动点，而且以后可知闭正方形上的每个连续自映射都具有不动点。当然实际上对f和X的条件是互相紧密联系的，只是一个整体的两个侧面，犹如摄影中要想得到一张清晰的照片，在对准距离后要将速度和光圈很好配合一样。

定理1.1说，$[0,1]$上的任一连续自映射都具有不动点，它在自映射"连续"这一很低的要求下就得出具有不动点这一很好的整体性质，这说明集合（或说空间）$[0,1]$具有一种很好的内在性质，我们将此性质说成：设$X\subset R^n$，若任一连续映射$f:X\to X$都具有不动点，则称X具有不动点性质*. 这样定理1.1就可写成：$[0,1]$具有不动点性质。这也等价于

一维布劳威尔定理：一维闭球$B^1=[-1,1]$具有不动点性质。

---

* 不动点和不动点性质的更一般的定义是：设X为拓扑空间，f为X的自映射，若存在$x_0\in X$使$f(x_0)=x_0$，称x_0为f的不动点，映射f具有不动点；若X的任一连续自映射都具有不动点，则称空间X具有不动点性质．拓扑学的基本知识告诉我们：R^n的任一子集X都可自然地成为拓扑空间．

不难看出“具有不动点性质”是拓扑性质。事实上，若 $h:X\to Y$ 是同胚映射。（即 h 连续，且 $h^{-1}: Y\to X$ 存在并连续）。X 具有不动点性质，则 Y 也具有不动点性质。因为若 $f:Y\to Y$ 是连续映射，则 $h^{-1}\circ f\circ h:X\to X$ 也是连续映射，因而存在 $x_0\in X$ 使 $h^{-1}\circ f\circ h(x_0)=x_0$，即 $f(h(x_0))=h(x_0)$，从而 f 具有不动点 $h(x_0)$，这就说明 Y 也具有不动点性质。

从不动点性质的定义可知，相对来说要确定一个子集 $X\subset R^n$ 不具有不动点性质比较容易，只需寻找一个不具有不动点的连续映射即可。例如，从例 1 和例 2 可知平环和球面 S^2 都不具有不动点性质。因为容易验证例 1 和例 2 中所述的映射是连续的。又如 R^n 不具有不动点性质，这只需将 R^n 沿 Ox_1 轴作一平移：$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(x_1+a,x_2,\cdots,x_n)$，$a\neq0$，这是一个没有不动点的连续映射。我们还可看出，挖去圆心的圆盘 $B^2-\{0\}$ 不具有不动点性质，无不动点的连续自映射取为：将 $B^2-\{0\}$ 的每一点绕O旋转角度 $\alpha(\neq 2n\pi)$。然而要证明一个子集 $X\subset R^n$ 具有不动点性质就绝非容易了，甚至要想象 R^n 中什么样的子集会具有不动点性质都会感到无从下手，即使象定理1.1已经运用分析工具证明出来，

而在几何直观上也并不是好理解的，或许这正是至今找到的具有不动点性质的空间不太多的原因吧。这方面的首创的工作当数布劳威尔的定理：

定理2.1（二维布劳威尔定理） 平面上的闭圆盘B^2具有不动点性质，即任一连续映射$f:B^2\to B^2$具有不动点。

下面两节将给出这一定理的不同证明。

2. 向量场

本节将给出二维布劳威尔定理的一个直观的几何论述。

首先我们注意到，若X是 R^2 的一个二维子集，$f:X\to R^2$ 是一个映射，则对每一 $x\in X$，有唯一的 $f(x)$ 与其对应，这样在X的每一点处可唯一确定一个向量，记为$v(x)$：它以x为起点，$f(x)$为终点，于是映射 f就确定了一个 R^2 中的定义在X上的向量场（若 $D\subset R^2$，R^2 中D上的向量场 v是指：对每一 $x\in D$，都有一个 R^2 中的以 x为起点的向量 $v(x)$ 与其对应）。反之，若给出定义在 $X\subset R^2$ 上的向量场 v，则确定了一个映射 $f:X\to R^2$，它将每个 $x\in X$ 映到向量

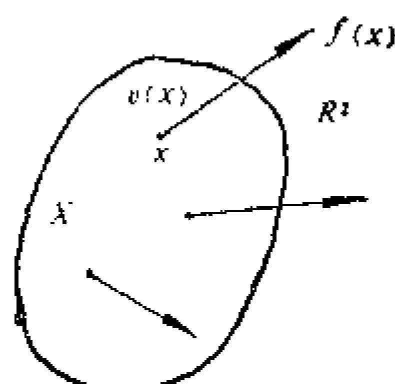


图2.4

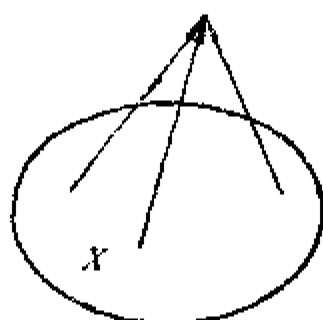


图2.5



图2.6

$v(x)$的终点，

于是我们看到，映射 $f:X\to R^2$ 与 X上的向量场 v 之间存在一个一一对应关系，例如图2.5所示的向量场对应于X上的常值映射，图 2.6所示的向量场表示了X的平移映射。这样我们就通过对向量场的几何性质的研究来讨论相应映射的性质。一个很自然的想法是：若映射$f:X\to R^2$是连续的，就称与它对应的（也可称等价的）向量

场v是连续的。

向量场有一些很有趣也很有用的性质，我们略表一二。

设C是平面内的一条闭曲线，v是C上的连续向量场，且对任意$x\in C$有$v(x)\neq 0$，给C以一个定向，从C上任一点P_0开始，让点x沿C按其定向走一圈，向量$v(x)$从P_0处出发回到原处，由于向量场v是连续的，因而向量$v(x)$转过的角度的代数和（以逆时针的转动角为正，顺时针为负）必定是2π的整数倍，称这整数为沿定向闭曲线C的向量场v的指标，记为$W(v, C)$。显然，任一闭曲线上的常向量场的指标为0。又如对圆周S^1给以逆时针为定向，在S^1的每一点附上一个单位切向量，其方向与S^1的定

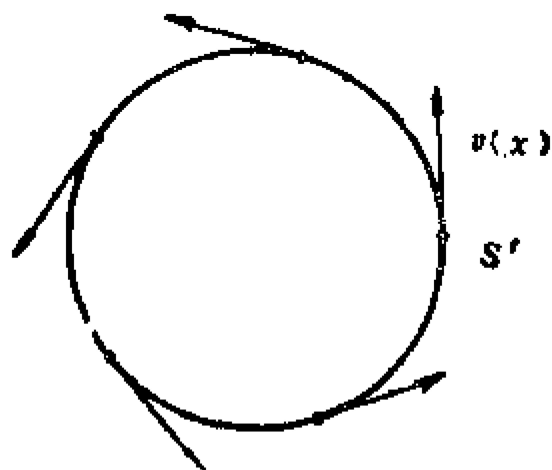


图2.7

向相一致，这样就确定了 S^1 上的一个向量场 v（图2.7），显然它的指标$W(v,S^1)=1$。图2.8所示 S^1上的另一向量场w的指标$W(w, S^1)=-2$。对任一条光滑的不打结的闭曲线C，每一点附以单位切向量，得到向量场 v，则其指标$W(v,C)=\pm 1$，这是著名的切线旋转指标定理。

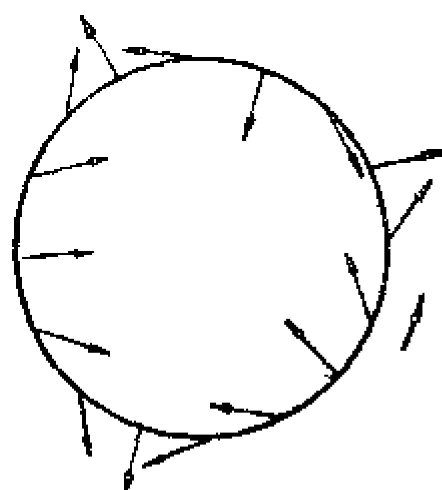


图2.8

对于球面 S^2 也可定义向量场，若对每一$x\in S^2$，在x处附以向量 $v(x)$，它是S^2在点 x 处的切向量，这样得到的向量场 v 称为球面 S^2 上的切向量场。对此我们不加证明地引述下面的定理。

定理2.2 若 v 是球面 S^2 上的连续切向量场，则至少存在一点$x\in S^2$，使$v(x)=0$。

这一定理的另一说法是：球面 S^2 上不存在

无处为零的连续切向量场．这个事实是一个十分动人的结果，它有一个外号叫作“发球定理”．如果让球面的每一点长出一根头发，谁想尝试把这些头发处处平滑地梳拢在球的表面上，那他将必然遭到失败，尽最大努力也只能作到如图2.9所示那样留下很少的一两个秃点，即常说的头上的发旋．因为若能在整个球面上将头发平滑地梳好，那么这些头发的切向量将给出 S^2 的一个无处为零的连续切向量场，这与定理2.2是矛盾的．

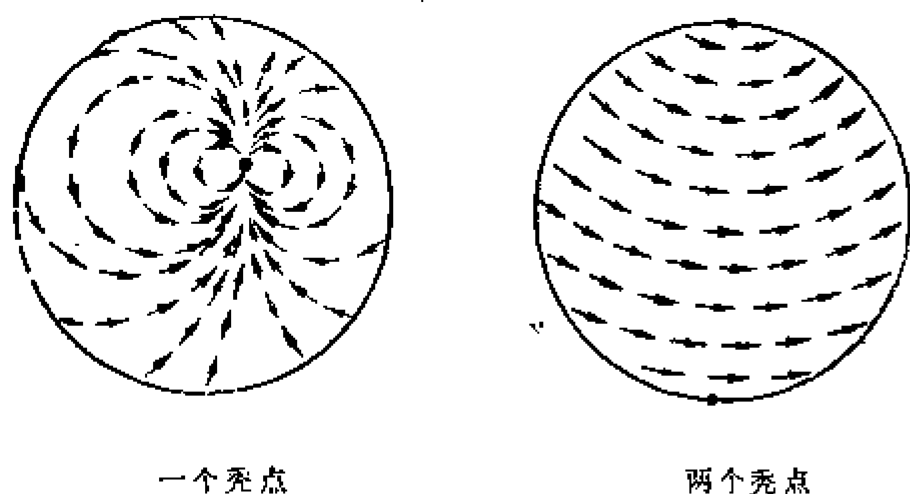


图2.9

定理2.2 的结果还有一个有趣的解释．我们可将 S^2 上的连续切向量场解释为一个流，定理2.2 说明：球面上的任一稳定流（即不随时间改变的流）至少有一个静止点．如将地球表面看成球面，且风流的速度向量是连续的，则在任一

瞬间，地球上总有一个无风点。

“发球定理”与球面自映射的不动点有密切关系，对此有如下推论。

推论 若连续映射 $f:S^2\to S^2$ 将 S^2 的每一点，都不映到对径点，则 f 具有不动点。

证明 假定存在满足条件的一个 f 不具有不动点。将每一点 $x\in S^2$ 与 $f(x)$ 相联得到球面 S^2 上的一个连续向量场 v，且由假设对每一 $x\in S^2$，$v(x)$ 都不垂直于 S^2 在 x 处的切平面，因而将 $v(x)$ 投影到 x 处的切平面上时，投影向量不是零向量。这样就得 S^2 上的一个无零点的连续切向量场，与定理2.2矛盾。从而推论成立*。

现在我们利用向量场给出二维布劳威尔定理（即定理 2.1）的几何直观证明。考虑闭圆盘在映射前后的情况，倘若定理结论不成立，即经连续映射 $f:B^2\to B^2$ 后，闭圆盘 B^2 没有一个点保持不动，这样每一点在映射后都变到圆内或圆上的另一处。设闭圆盘的任一点 P 的连续映射象是

---

* 这推论也可根据下面用向量场证明布劳威尔定理的方法直接证明，从北极到赤道作一族平行纬线圆，将 v 在纬线圆上向量投影到纬线所在平面，考察纬线圆在平面内的向量场的指标变化.

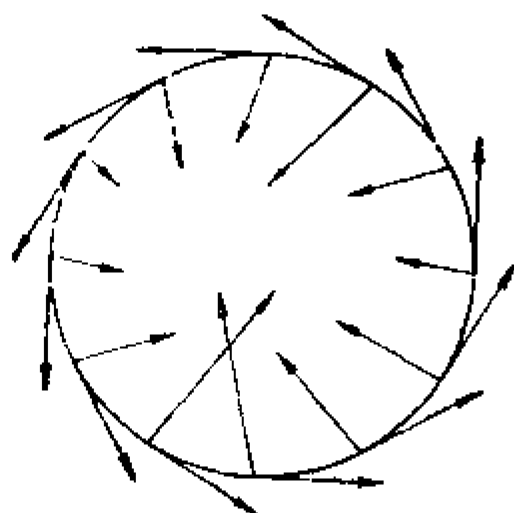


图2.10

P', B' 的无不动点的连续自映射 f 对应有闭圆盘上的一个无零点的连续向量场 v, 即 $v(P)=\overrightarrow{PP'}$. 现在考虑边界圆C及C上相应的向量场，因为按假设圆上任一点的象不会在圆外，从而对任意 $x\in C$, 向量 $v(x)$总指向圆内.如果给C以逆时针的定向，则我们可以断言：C上的向量场 v 的指标 $W(v, C)=1$. 为了说明这一点，我们沿C的定向作 C 的单位切向量场 t, 如前所说，t 的指标 $W(t, C)=1$, 因而我们只需证明C上的向量场 v和 t有相同的指标. 如若不然，由于 v 和 t 都是连续向量场，则沿圆周C向量 $v(x)$必定绕 $t(x)$转过非零整数圈，这样$v(x)$必然出现切线位置，然而根据假设这是不会出现

的，故有 $W(v, C)=1$.

现在考虑圆盘内与边界圆C同心的圆，以及这圆上相应的向量场，则这向量场上的指标也必定等于1. 这是因为当边界圆连续地变化到一同心圆时，由于向量场 v是连续的，因而从一点到另一点时向量方向是连续变化的，从而在各同心圆上向量场的指标也是连续变化的。但是指标只能取整数，因此必定永远等于其原来的值1，因为从1跳到其他整数将产生指标变化的不连续性（一个连续变化的量如果只能取整数值，它必定是一个常量。这个结论是在许多定理的证明中经常出现的典型数学推理）.从而我们能够找到任意小的同心圆，对这圆上的向量场的指标是1. 然而这恰恰又是不可能的. 因为根据映射连续性的假设，在一个充分小圆上的向量的方向均近似于圆心处的向量方向，因此我们可以选到足够小的圆，使向量 $v(x)$ 绕它一圈的角度变化的绝对值小于给定的一个正角度，例如10°，这就意味着这个很小的圆上的向量场 v的指标为0. 这个矛盾说明原先所作的用圆盘到自身的连续映射没有不动点的假定不能成立，从而定理2.1成立。

以上证明利用向量场这一工具，将 B^2 的无不动点的连续自映射转化为[0,1] 上的连续整值

函数 $W=W(v, C(r))$，其中 r 是同心圆的半径，$r\in[0,1]$，然而这函数在1处的值为1，而在0处的值为0（$C(0)$变成点圆，指标视为0），从而得出矛盾。如果将 B^2 中挖去一点O，则函数 $W=W(v,C(r))$就定义 $(0,1]$上，从而得不出矛盾，从而证法失效，或是命题不成立。事实上在§1中我们已经说过，挖去一点的圆盘不具有不动点性质。"连续自映射"这一条件不变，空间从 B^2 改变为$B^2-\{O\}$就失去了"具有不动点性质"这一特性，这就说明 B^2 与 $B^2-\{O\}$ 在某一方面有明显不同的性质。下一节我们将从这一角度出发来讨论布劳威尔定理。

3. 闭环路、基本群和布劳威尔定理

我们先从几何直观上来观察为什么圆盘B^2被刺了一个小洞后就不再具有不动点性质了。对刺破了圆盘$B^2-\{O\}$，很容易通过一个连续映射将它"捏到边界圆 S^1 上去"，这只需将圆心O与S^1 的每一点相连，把一条半径上的点都映到半径的外端点，不难验证这一映射是连续的（如对圆盘 B^2作这一映射，就无法确定O映到 S^1 的何

处，且不论将O映到 S^1 的哪一点，都会破坏这映射的连续性）．我们引入下面的术语描述这一结果．

定义 设A是拓扑空间X的子集，若存在连续映射 $r: X \to A$，使映射 r 限制在A上时是恒等映射，即 $r|A = id_A$（id表示恒等映射），则称A是X的收缩核，r 是（X到A的）保核收缩映射。

例 1 如图2.11，设 $R_2 > R_1$，则小圆盘$B^2(R_1)$是大圆盘 $B^2(R_2)$ 的收缩核。保核收缩映射作法：将圆环部分的点向心地映到 $B^2(R_1)$ 的边界圆上，而 $B^2(R_1)$ 的点保持不动（这一点按定义是必须遵循的）．

例 2 如图2.12(a)所示，取X＝大圆盘．E＝小圆盘∪线段AB，则 E是X 的收缩核．保核

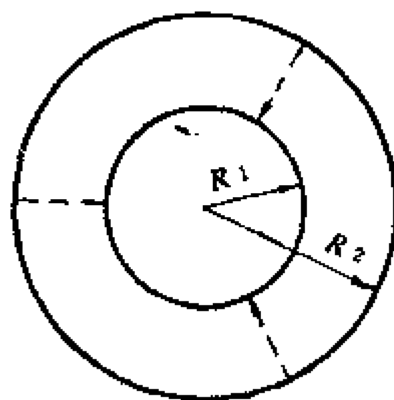
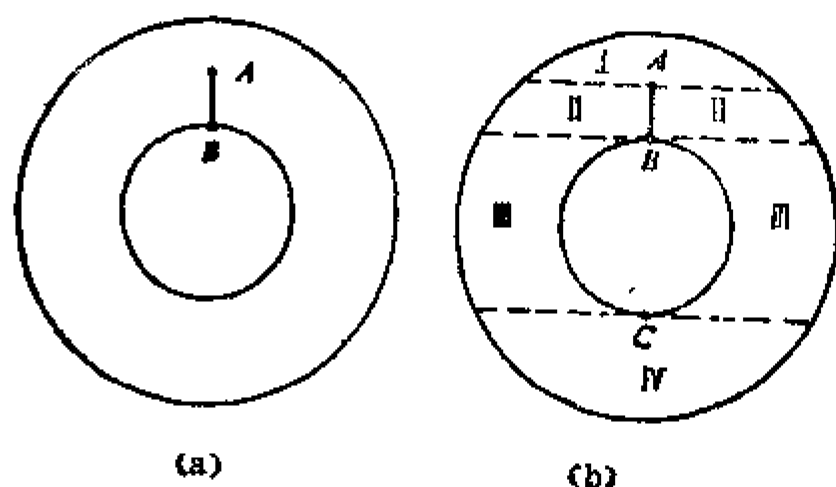


图2.11



(a) (b)

图2.12

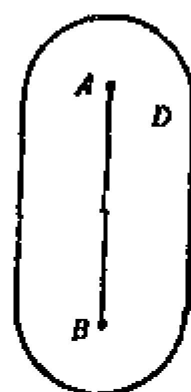


图2.13

收缩映射作法：E的点保持不动，把$X-E$的点分成四部分，如图2.12(b)，将Ⅰ的点映到A点，Ⅱ的点按水平方面映到线段AB上，Ⅲ的点按水平方面映到小圆盘的边界圆上，Ⅳ的点映到点C。

读者容易验证图2.13中线段AB是区域D的收缩核。

这样我们就可将本节一开始讨论的结果改写成：边界圆 S^1 是 $B^2-\{O\}$ 的收缩核。这一结论说明，从某一角度看刺破的圆盘与S^1（几乎掏空了的圆盘）有相同的特性。

注意，前面的讨论并没有得出"S^1不是B^2的收缩核"这一结论，因为要证实这结论不是靠检验若干个映射所能解决的。然而从几何直观想象感到这一结论应该成立，即欲将无洞圆盘捏到整个边界圆上，非使这圆盘破裂不可，而这就会导致映射不连续。事实上确实有

定理2.3 边界圆S^1 不是闭圆盘 B^2 的收缩核。

然而要严格证明这一定理并不是很简单的，这将是本节的主要任务。在证明这一定理以前，先观察它与"B^2具有不动点性质"的事实（定理2.1）是否有关，下面一个简单的证明表明：定理2.1 是定理2.3 的推论。

假定存在连续映射 $f:B^2\to B^2$，它不具有不动点，则对每一$x\in B^2$ 有 $f(x)\neq x$，引从 $f(x)$ 到x 的射线，它必与边界圆交于唯一的一点x'，这样 $x\to x'$ 确定了闭圆盘到其边界圆上的一个映射 $g:B^2\to S^1$（图2.14），它使边界圆 S^1的每一点保持不动，即有 $g|S^1=id_{S^1}$；由映射 f 的连

续性容易得出映射 g 的连续性。这样 g 就是B^2到S^1 上的保核收缩映射，与定理2.3矛盾，因而定理2.1成立。

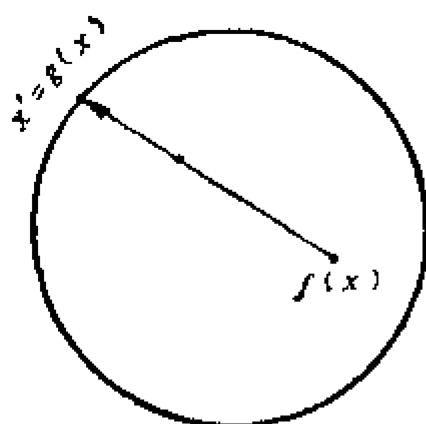


图2.14

一个直观的区别圆盘与有洞圆盘（包括圆周）的性质是：如从一点 $x\in B^2$ 出发，用细绳在 B^2 内铺一条回到点 x的闭环路，则通过将细绳收紧，此闭环路必可收缩成点 x；但在有洞圆盘内这样做时，未必都是如此，当闭环路绕过洞（一圈、二圈等）时就不能收缩成一点。下面我们引入一些定义和定理来说明这一点。

定义 拓扑空间X内的一条道路是指一个连续映射 $\gamma:I\to X$，其中 $I=[0,1]$，点 $\gamma(0)$ 与 $\gamma(1)$分别叫作道路 γ 的起点和终点。若X的一条道路 $\gamma:I\to X$ 满足条件 $\gamma(0)=\gamma(1)$，即起点和终点相同，则称 γ 为X的一条环路，$\gamma(0)$叫

作这环路的基点。

若 γ 是一条环路，则由下确定的 γ^{-1} 也是环路：

$$\gamma^{-1}(t)=\gamma(1-t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

它与 γ 有相同的基点，称为 γ 的逆环路。若 α 和 β 是基点相同的两条 环路，定义它们的乘积 $\alpha\beta$ 为环路*

$$\alpha\beta(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

由环路 α和β得到乘积 $\alpha\beta$，实质上就是将α的定义域压缩到 $[0,\frac{1}{2}]$上，而将 β 的定义域压缩到 $[\frac{1}{2},1]$ 上，如图2.15所示。遗憾的是具有相同

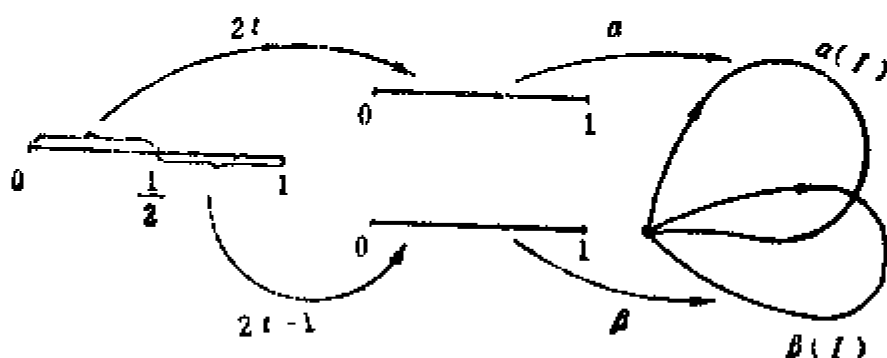


图2.15

* 映射 $\alpha\beta$的连续性可由粘合引理得到。

基点的所有环路在上述乘法和逆的定义下不能构成一个群，但是经过用“同伦”将所有环路分类后就能到一个群——基本群。

定义 设α，β:I→X 是X的两条道路，若存在连续映射 H:I×I→X，使

$$H(0,\ t)=\alpha(t),$$
$$H(1,t)=\beta(t),\ \forall t\in I$$

则称道路 α同伦于 β，记为 $\alpha\underset{H}{\simeq}\beta$，连续映射H叫作 α 到 β 的同伦。

道路 α同伦于 β的直观几何解释为：α可通过连续变形变到β，而 H表示了这个连续变形的过程，如图2.16，若α，β 是同一基点的环路，则 $\alpha\underset{H}{\simeq}\beta$ 表示环路 α 可变形为β，如图2.17。

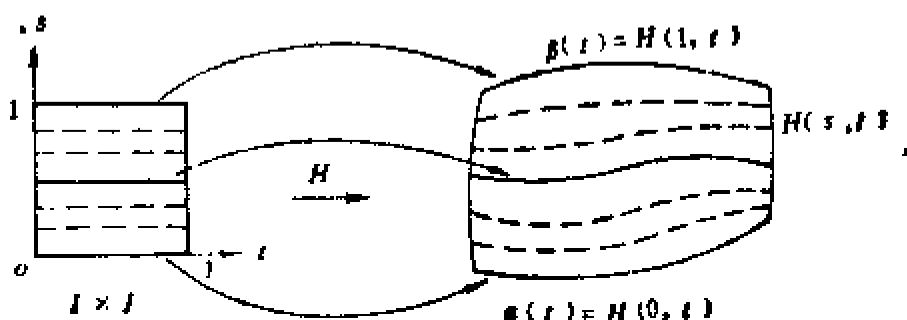


图2.16

例 设 X是 R^n中的凸集（即$\forall x$，$y\in X$，线段 xy上的点均属于X），α，β 是X的两条道路，则对每一 $t\in I$，连结 $\alpha(t)$ 与 $\beta(t)$ 的线段

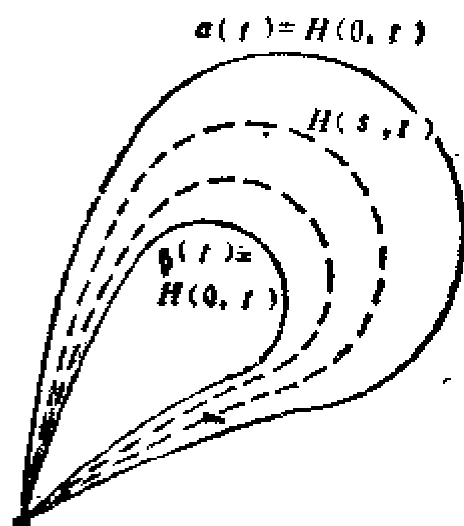


图2.17

含于X内，于是 $\alpha(t)$ 可沿这线段滑动到 $\beta(t)$，从而使 α同伦于 β，确切地说就是定义同伦H为

$$H(s,\ t)=(1-s)\alpha(t)+s\beta(t),$$
$$0\leqslant s,\ t\leqslant 1$$

通常称这同伦为直线同伦。

一个自然的想法是将相同基点的同伦环路看作是同类的，即本质上是相同的，下面的引理证实了这种想法的合理性。

引理 空间X内具有相同基点的全体环路构成一个集合，则环路的同伦是这集合上的一个等价关系。

证明 首先对任一环路 α有 $\alpha \underset{H}{\simeq} \alpha$，这里$H$定义为

$$H(s, t)=\alpha(t)$$

其次，若 $\alpha \underset{H}{\simeq} \beta$，则$\beta \underset{G}{\simeq} \alpha$，其中G取为

$$G(s, t)=H(1-s, t)$$

最后，若 $\alpha \underset{H}{\simeq} \beta$，$\beta \underset{G}{\simeq} \gamma$，则 $\alpha \underset{F}{\simeq} \gamma$，这只需取$F$为

$$F(s,t)=\begin{cases} H(2s, t) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

因而同伦是一个等价关系。□

据此引理就可将具有相同基点 $p \in X$的所有环路按同伦这一等价关系分成等价类，称这种等价类为同伦类，记 α 所属的同伦类为$\langle\alpha\rangle$。这样一个同伦类中的每一环路都可通过连续变形变到这类中的任意另一环路，即在相差一个连续变形下同类的环路是一样的。给出 $\langle\alpha\rangle$ 和 $\langle\beta\rangle$，可自然地定义同伦类的乘积和逆：

$$\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle=\langle\alpha\beta\rangle, \quad \langle\alpha\rangle^{-1}=\langle\alpha^{-1}\rangle$$

这个定义是有意义的，即与代表元的选取无关。例如，若$\alpha' \underset{F}{\simeq} \alpha$，$\beta' \underset{G}{\simeq} \beta$，则 $\alpha'\beta' \underset{H}{\simeq} \alpha\beta$， 这只需取$H$为

$$H(s,t)=\begin{cases} F(s, 2t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ G(s, 2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

现在我们可用环路同伦类来构造一个群。

定理2.4 拓扑空间X中以 $x\in X$ 为基点的所有环路同伦类在乘积 $\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle=\langle\alpha\beta\rangle$下构成一个群。这个群称为 X在点 x 处的基本群，记为$\pi_1(X, x)$。

证明 只需采用代数上对群的规范证法。

1° 证结合律成立，即对任意 $\langle\alpha\rangle$，$\langle\beta\rangle$，$\langle\gamma\rangle$ 有

$$(\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle)\langle\gamma\rangle=\langle\alpha\rangle(\langle\beta\rangle\langle\gamma\rangle)$$

它等价于 $\langle\alpha\beta\rangle\langle\gamma\rangle=\langle\alpha\rangle\langle\beta\gamma\rangle$，这只需证明$(\alpha\beta)\gamma\simeq\alpha(\beta\gamma)$。显然环路$(\alpha\beta)\gamma$与$\alpha(\beta\gamma)$的象集一致，只是在作乘积过程中 α、β 和 γ 的定义域被压缩的情况不同。对 $(\alpha\beta)\gamma$，α，β和 γ 的定义域分别压缩为$[0,\frac{1}{4}]$、$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$和$[\frac{1}{2}, 1]$，而对 $\alpha(\beta, \gamma)$而言分别为$[0,\frac{1}{2}]$、$[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ 和 $[\frac{3}{4},1]$。这可用下面的连续函数 $f:I\to I$加以调整：

$$f(t)=\begin{cases}2t & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4}\\ t+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{t+1}{2} & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

通过 f的调整即得 $(\alpha\beta)\gamma=(\alpha(\beta\gamma))\circ f\simeq\alpha(\beta\gamma)$。函数 f的作用如图2.18。

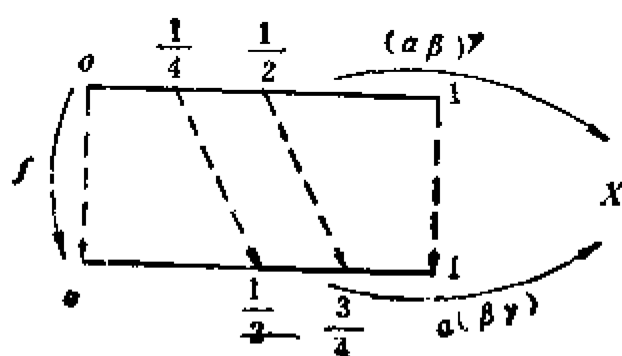


图2.18

2° 单位元素定义为点 x处的常值环路 e的同伦类 $\langle e\rangle$，其中 e由 $e(t)=x$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 所确定（$\langle e\rangle$的几何特征是：若 $\gamma\in\langle e\rangle$，则 γ可通过连续变形成一点）。对于 $\langle\alpha\rangle\langle e\rangle=\langle\alpha\rangle=\langle e\rangle\langle\alpha\rangle$ 的证明，可作类似于1°的调整函数 f（不过这里是二段分段函数），就可证得 $\alpha e\simeq\alpha$ 和$e\alpha\simeq\alpha$，如证 $\alpha e\simeq\alpha$可取函数

$$f(t)=\begin{cases}2t & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

3° 证 $\langle\alpha\rangle\langle\alpha\rangle^{-1}=\langle e\rangle$，即 $\alpha\alpha^{-1}\underset{H}{\simeq}e$，据图2.19的同伦设想可直接定义$H$为

$$H(s,t)=\begin{cases}\alpha(2t) & 0\leqslant 2t\leqslant s\\ \alpha(t) & s\leqslant 2t\leqslant 2-s\\ \alpha^{-1}(2t-1) & 2-s\leqslant 2t\leqslant 2\end{cases}$$

定理证毕。

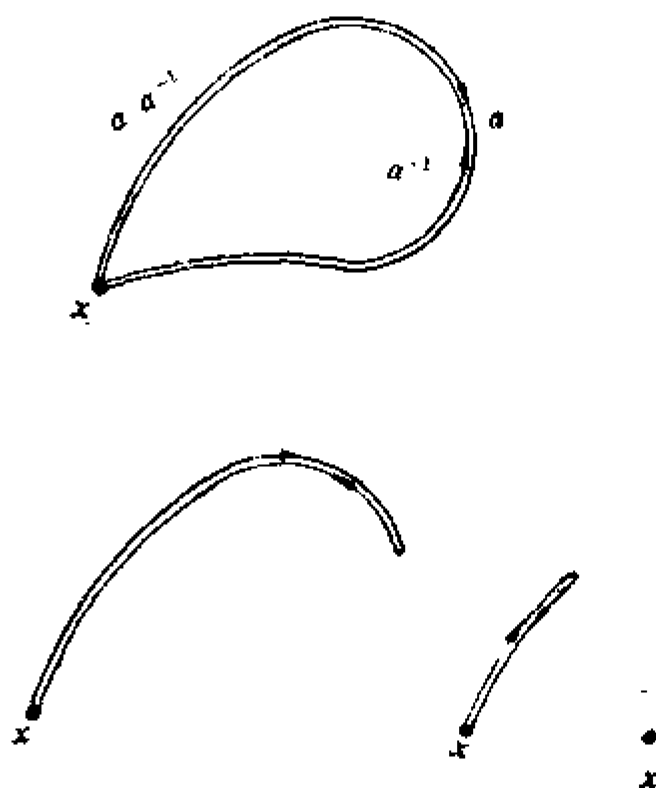


图2.19

现在我们已通过同伦对空间X的每一点 x 建立一个基本群 $\pi_1(X,x)$，紧接着就会产生这样的问题：同一空间在不同点处的基本群是否相同即是否同构呢？答案是否定的，稍后一点将举例说明。但对空间X略加一点容易想象的条件即能得出肯定的结论。

定理2.5 若空间 X是道路连通的，即对X的任意两点总有X中的道路将它们相连。则对任意两点 p、$q\in X$有 $\pi_1(X, p)$同构于$\pi_1(X, q)$。

在证明之前先对道路作一些补充说明。对道路 γ也可定义其逆为$\gamma^{-1}(t)=\gamma(1-t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$；若两条道路 α和 β满足 $\alpha(1)=\beta(0)$，即 α的终点恰是 β 的起点，则可定义它们的乘积 $\alpha\beta$（将 α和 β 连接成一条新的道路$\alpha\beta$）：

$$\alpha\beta(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

容易证明道路乘积和逆有以下性质：

1° 若 $\alpha\simeq\alpha'$、$\beta\simeq\beta'$，且$\alpha(1)=\beta(0)$，$\alpha'(1)=\beta'(0)$，则 $\alpha\beta\simeq\alpha'\beta'$；

2° 若道路 α、β和 γ满足 $\alpha(1)=\beta(0)$和 $\beta(1)=\gamma(0)$，则 $(\alpha\beta)\gamma\simeq\alpha(\beta\gamma)$；

3° $\alpha\alpha^{-1}\simeq e$，$\alpha^{-1}\alpha\simeq e$，其中 e是 $\alpha(0)$为基点的常值环路。

定理2.5的证明 由于 X是道路连通的，故存在从 p到 q 的道路，记为 γ。利用 γ 可自然地作出 p和 q 处同伦群之间的映射，设 α 是以p为基点的一条环路，则 $(\gamma^{-1}\alpha)\gamma$是以 q 为基点的环路（图2.20），因而可令

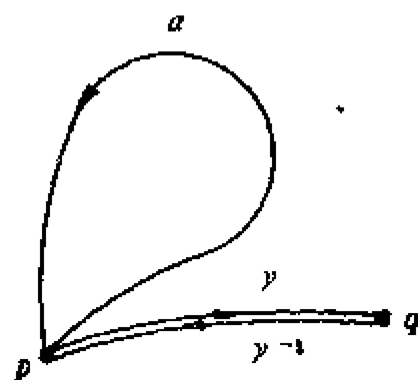


图2.20

$$f_\gamma: \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q),$$
$$\langle \alpha \rangle \mapsto \langle \gamma^{-1} \alpha \gamma \rangle.$$

利用上面的性质1°—3°，容易证明映射 f_γ 是有意义的，而且是一个同态。f_γ 的逆 f_γ^{-1} 也存在，若 β是以 q为基点的环路，则

$$f_\gamma^{-1}: \pi_1(X, q) \to \pi_1(X, p)$$
$$\langle \beta \rangle \mapsto \langle \gamma \beta \gamma^{-1} \rangle$$

且 f_γ^{-1} 也是同态，因而 f_γ 是同构，定理证毕。

根据这一定理，道路连通空间X在每一点处的基本群都同构，因而可说成是X的基本群，记为 $\pi_1(X)$。从基本群的构作过程可以看出，对 R^2 中的道路连通子集而言，基本群可以用来刻画子集是否有洞。下面简要地介绍一些常见图形的基本群。

1）X 是 R^n 中的凸集，特别 $X = B^n$，则

$\pi_1(X)$是平凡的，即 $\pi_1(X)=\{e\}$。因为以x为基点的任一环路都可通过直线同伦（见本节的例）收缩到点 x。我们称基本群平凡的空间为单连通空间，它的特点是任一环路都同伦于一点。

2）单位圆 S^1 的基本群 $\pi_1(S^1)\simeq\mathbf{Z}$，其中$\mathbf{Z}$是整数群。若给 S^1 以定向，a 是绕 S^1转m圈的环路，将 $\langle a\rangle$ 对应 $m\in\mathbf{Z}$。

3）球面 $S^n(n\geqslant2)$ 的基本群是平凡的，因而 $S^n(n\geqslant2)$是单连通的。

4）环面$\mathbf{T}$ 的基本群 $\pi_1(T)\simeq\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$。先给环面上的纬线圆和经线圆以定向，若 a是环面上绕纬线圆m圈、绕经线圆 n 圈的环路，则$\langle a\rangle$对应于 $(m, n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$。

例 设 $X=S^1\cup\{圆心O\}$，则X不是道路连通的，因为圆心O与圆上一点无道路可联结。显然 $\pi_1(X, O)$ 是平凡的，若 $p\in S^1$，则 $\pi_1(X, p)\simeq\mathbf{Z}$，这就说明不是道路连通的空间在不同点处的基本群未必同构。

现在已经看到，B^2的基本群是平凡的，而边界圆 S^1 的 $\pi_1(S^1)\simeq\mathbf{Z}$，这从环路的角度描述了它们的不同特性。要利用这结果来证明 S^1 不是B^2的收缩核，还需要一座桥梁：若 $f:X\to Y$是道路连通空间之间的连续映射，f 能使 $\pi_1(X)$ 与

$\pi_1(Y)$ 发生什么联系呢？对此我们可分析一下两空间的环路在 f下的联系．先选 $x\in X$为基点，在Y中选 $y=f(x)$为基点，若 α为 X内以 x 为基点的环路，则映射 $f\circ\alpha$ 是 Y内以 y为基点的一条环路．且容易证明：若在X内 $\alpha\simeq\beta$，则在Y内 $f\circ\alpha\simeq f\circ\beta$，因此可以定义映射

$$f_*:\pi_1(X,\ x)\to\pi_1(Y,\ y)$$
$$\langle\alpha\rangle\mapsto\langle f\circ\alpha\rangle$$

由于 $f\circ(\alpha\beta)=(f\circ\alpha)(f\circ\beta)$，即可看出$f_*$是群的同态，称 f_* 为 f的诱导同态。

根据诱导同态的构作立即可得：

（1）恒等映射的诱导同态是同构。

（2）对于乘积映射 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 有

$$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$$

如将（2）应用于同胚映射 $h:X\to Y$，由

$$X\xrightarrow{h}Y\xrightarrow{h^{-1}}X \quad 与 \quad Y\xrightarrow{h^{-1}}X\xrightarrow{h}Y$$

得出

$$h^{-1}{}_*\circ h_*=(id_X)_*:\pi_1(X)\to\pi_1(X)$$
$$h_*\circ h^{-1}{}_*=(id_Y)_*:\pi_1(Y)\to\pi_1(Y)$$

因此 $h_*:\pi_1(X)\to\pi_1(Y)$ 是同构，即基本群在同构意义下是拓扑不变性质。

有了诱导同态这一桥梁我们就可最后完成定理2.3的证明了。

定理2.3的证明　假如存在连续映射 $f: B^2 \to S^1$，它使 S^1 上的每点不动，令 $i: S^1 \to B^2$ 是内含映射，即任一 $x \in S^1$，$i(x) = x$。由 $S^1 \xrightarrow{i} B^2 \xrightarrow{f} S^1$ 可得

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B^2) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1)$$

然而对所有 $x \in S^1$有 $f \circ i(x) = x$，即 $f \circ i$是 S^1 的恒等映射，因此 $f_* \circ i_*$ 是 $\pi_1(S^1)$ 到自身的同构，这样 f_* 必定是满同态，但 $\pi_1(B^2)$ 是平凡的，而 $\pi_1(S^1) \simeq Z$，这就产生矛盾，从而定理成立。□

最后我们以下列几点说明作为本节的结束。

1）本节通过同伦对每个道路连通空间建立了基本群，它能反映 R^2 中的子集是否有洞这一性质，利用基本群证明了定理2.3，而定理2.1是它的推论，这样我们用拓扑方法给出了二维布劳威尔不动点定理的又一证明。

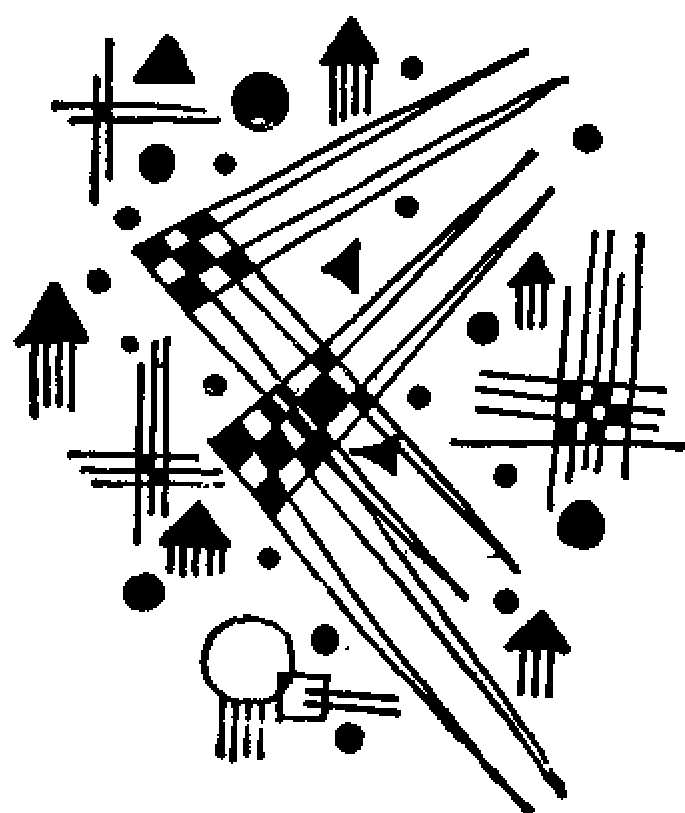
2）本节对布劳威尔不动点定理的论证最好地显示了代数与拓扑之间的相互作用。原来的几何问题是困难的，但是一旦翻译成了代数问题，

只用非常简单的思想就解决了。

3）利用同伦的方法研究拓扑空间的性质的理论称为同伦论，基本群是它的一个内容，同伦论是代数拓扑的一个组成部分。

4）定理2.3对 $n\geqslant1$都成立，即：S^{n-1}不是B^n 的收缩核。$n>2$ 时，需要同调群加以证明，本书第三部分将对 $n=3$作概要介绍。对 $n=1$的证明如下：若存在保核收缩映射 $r:[-1,1]\to\{-1,1\}$，由于 r是连续的，$[-1,1]$ 是连通的，故它的象集 $r([-1,1])=\{-1,1\}$也是连通的，矛盾，故$\{-1,1\}$不是$[-1,1]$的收缩核。根据这结论又可推出一维布劳威尔定理：若存在连续映射 $f:[-1,1]\to[-1,1]$，它不具有不动点，则对每一$x\in[-1,1]$，$f(x)\neq x$，这样可以作一个映射$g:[-1,1]\to\{-1,1\}$：若$f(x)>x$，令 $g(x)=-1$；若 $f(x)<x$，令$g(x)=1$。因为$f(x)\neq x$，故有$g(-1)=-1$，$g(1)=1$，且由 f 连续可知 g也连续，于是 g是$[-1,1]$到$\{-1,1\}$ 上的保核收缩映射，这是不可能的，从而$[-1,1]$ 的每个连续自映射都具有不动点。以上两个证明相联就给出了一维布劳威尔定理的又一证明，通过与定理1.1 的证明相比较，可以体会到这两个证明的不同风味。

三 同调群与三维布劳威尔不动点定理



1. 基本思想

这一部分的主要任务是证明三维布劳威尔不动点定理，即闭球体B^3具有不动点性质。在第二部分我们曾说过，定理2．3对$n>2$也是成立的，因而S^2不是B^3的收缩核，尽管这一结论与$n=2$一样，直观上是相当明显的，但要证明它却并不是容易的。而一旦有了此结论，我们就可以证明三维布劳威尔定理成立。因而问题的关键是要证明S^2不是B^3的收缩核。

回想在前一部分中证明S^1不是B^2的收缩核时，我们利用基本群作为工具，S^1的基本群同构于Z，而B^2的基本群是平凡的。然而现在不能利用基本群这一工具了，因为S^2和B^3的基本群都是平

凡的．基本群用来描述二维的洞是非常有效的，因为它的每个元素是由具有公共基点的一族单参数的环路所构成，这些环路扫描出一片面，只要这片面中含洞，基本群就不是平凡的．然而对三维洞而言基本群就不大灵验了，如对球面S^2，它的每一条环路都可连续变形为它的基点，基本群就描绘不出球面里面的一个三维空洞．当然接着就会想到用一族单参数的闭曲面来描述三维洞，这确实也是可以的，就是二维同伦群的思想(基本群是一维同伦群）．然而数学的天地是广阔的，方法是多样的，我们将从另一角度——同调的观点来考虑，因为这种方法在某种意义上来说更一般更清晰．

用同调观点来处理“S^2不是B^3的收缩核”这一问题，其基本思想有以下几点：

1）B^3作为一个闭球体，它具有边缘S^2，也就是说S^2作为B^3的组成部分时它是B^3的边缘．然而单独地来看S^2，它只是一个球而，一个空心的球面，而不是别的什么几何体的边缘．这犹如一只刚从蛹变化而来的蝉，它的第一个目标就是从地球的内部爬到地球的表而，因为只有到达地面这只蝉的生活才得以真正开始，因此对它来说地球的边缘是何等的重要；然而对一只始终生活在球

面上的小虫来说，它会感到它所赖以生存的球面是多么美好，可以随心所欲地走动，当它寿终正寝时也不会认为它的一生是生活在某个东西的边缘上。S^2作为B^3的组成部分时是B^3的边缘，而单独看时它并不是边缘，同样地当$S^1\subset B^2$时，S^1是B^2的边缘，而S^1本身作为一个空间同时就不是边缘，这一思想看起来是简单的，然而它在同调观点看来是基本而重要的，为此请读者务必认清。

2）R^3中的几何图形是多种多样的，其中最简单的当然是多面体。多面体不仅结构简单，规则性强，而且对它们的性质也颇为熟悉，如有反映顶点数、棱数和面数关系的欧拉定理等。从同胚的角度看，闭球体可看成四面体，同样球面可看成四面体的表面，也可看成四个三角形拼接而成。同样地闭圆盘B^2可看成三角形，S^1可看成三条棱彼此首尾相接而成。R^3中一般的几何图形可同胚于由一些多面体、多边形和棱很好拼接所得的图形（仍称为多面体），而用后者代替前者来讨论其几何性质，显然容易捉摸和处理。例如，环路本来可以是任意曲线，但在同伦的意义下不仿将环路限制于沿棱而走，这种沿棱的环路就少得多了，处理起来又简单。而且这种方法还可用来讨论某些不能在R^3中实现的拓扑空间的性质。

3）基本群考虑的是所有环路的同伦类，也就是说，在讨论中涉及到的主要是环路本身及它们的相互关系，而同调考虑的角度则不同，它是从各维图形之间的联系上来考虑问题的。例如，由一些棱构成的道路称为棱道路（更一般地称为1维链），它的边缘一般是两个点（点是0维的，比棱低一维），棱道路的边缘为0时就成了棱环路（更一般地称为闭链）。例如图3.1中左边的三角形ABC同胚于B^2，右边的空心三角形DEF代

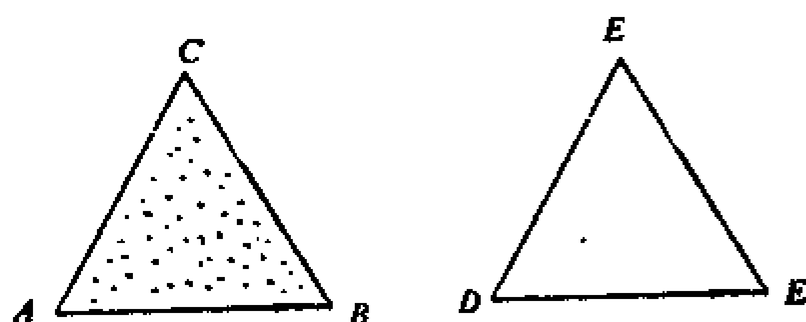


图3.1

表S^1，则（1）$AB+BC+CA$和（2）$DE+EF+FD$都是闭链，因为它们的边缘都是0。然而这两闭链是有区别的，闭链（1）是2维面$\triangle ABC$的边缘，而闭链（2）就不是什么图形的边缘，它与2维面根本就没有什么关系。这一区别正是本节1中思想的体现。这样处理问题的优点在于，不受维数的限制而更具有一般性。例如在考

虑由 2 维面构成的链时，则可讨论它的边缘（由 1 维棱构成）是什么和它是否构成某个 3 维体的边缘，即通过它和比它低一维的链及比它高一维的链的联系来讨论图形的 2 维结构性质。这种处理必然会更深刻地揭示图形的几何性质。

4）在第二部分末我们已经指出，用基本群证明二维布劳威尔定理的明显特征是代数与拓扑的相互作用，将困难的几何问题用简单的代数思想加以解决。这一思想在本章中将连续沿用，也就是说我们要用代数方法来精确地描述上面所说的想法。为了充分利用代数方法，我们一开始将讨论范围作必要的扩大，以让代数工具有充分施展的领域。例如在讨论图形的 1 维结构时，将不限于由各条首尾相接的棱所构成的棱道路或棱环路，而是允许棱道路可以间断（当然这时就不再是原始意义下的“道路”），每条棱可以多次重复，也可以反向，这就是将每条棱加以定向后，再作它们的整系数的线性组合（一个线性组合就称为一个 1 维链），它们的全体在自然的加法下是封闭的，从而构成一个群，称为 1 维链群，同样可有各维链群，这些就是基本的舞台。当然我们感兴趣的还是那种闭的链，因此就从代数角度去找出链群的一个重要子群——由闭链构成的闭

链群。最后，核心的问题是要分清哪一些1维闭链是2维链的边缘（这种闭链的全体又构成闭链群的子群——边缘链群），哪一些闭链不是2维链的边缘，这两种闭链代表了一维结构的不同特性，最后通过一个群——同调群来描述一维结构，不同维的结构可通过相应维数的同调群得以反映。

5）以同调群为工具完成下述定理的证明：

定理3.1 球面S^2不是闭球体B^3的收缩核。

利用定理3.1最后证得三维布劳威尔不动点定理，即

定理3.2 闭球体B^3具有不动点性质，也就是说，每一个连续映射$f: B^3 \to B^3$都具有不动点。

2. R^3中子集的洞与同调群

第二部分已经提到一个断言：S^{n-1}不是B^n的收缩核，$n>0$。为证明此结论成立，一维时使用的是连通性（见第二部分第3节说明4°），二维时使用的是基本群（因为S^1与B^2都是连通的，故不能用连通性），对三维而言，基本群也不起作用了，因为S^2与B^3都是单连通的，即基本群都是平凡的，因此我们必需另觅工具，这是本节的

中心任务。

现在我们重新来观察基本群，以期得到某些启示。首先在同胚的观点下，可将一些几何图形看成多面体，如B^2看成三角形，S^1看成空心三角形，B^3看成四面体，S^2看成四面体的表面，环面T可看成三段三棱柱相接所得体的表面（图3·2）。多面体是比较简单的，它可分解成顶点、棱、多边形及所围之体。由于基本群考虑的是一

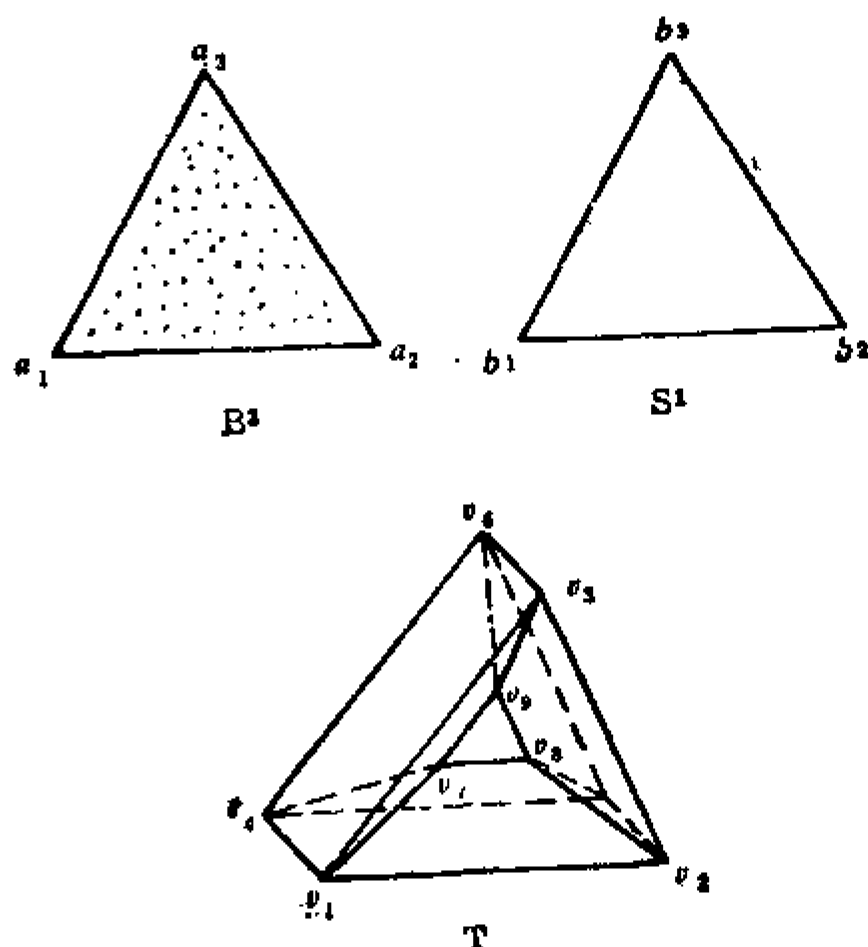


图3.2

点处环路的同伦类，因而可将环路限制于沿棱所走，称为棱环路，如对环面T考虑顶点v_1处的棱环路，则$v_1v_2v_3v_1$，$v_1v_4v_7v_1$，$v_1v_7v_8v_2v_1$，$v_1v_4v_6v_9v_7v_1$等均属此列。其中棱环路$v_1v_7v_8v_2v_1$围了一面，因而认为它等价于一点，这种棱环路称为非本质的；棱环路$v_1v_2v_3v_1$和$v_1v_4v_7v_1$都不围一块面，故不等价于一点，称这种棱环路是本质的；还认为棱环路$v_1v_4v_7v_1$等价于$v_1v_4v_6v_9v_7v_1$，因为可以设想，由于环路$v_4v_6v_9v_7v_4$围了一块面，故可用棱v_4v_7代替棱道路$v_4v_6v_9v_7$，类似地对往返重复的棱也认为可以除去或添加。在上述等价意义下，可将以一个顶点v为基点的所有棱环路分成块等价类，记棱环路$vv_1v_2\cdots v_kv$所属的等价类为$\{vv_1\cdots v_kv\}$，并定义等价类的乘法和逆为

$$\{vv_1\cdots v_kv\}\cdot\{vw_1\cdots w_lv\}$$
$$=\{vv_1\cdots v_kvw_1\cdots w_lv\}$$
$$\{vv_1\cdots v_kv\}^{-1}=\{vv_k\cdots v_1v\}$$

可以证明在这乘法和逆的定义下，所有棱环路的等价类构成一个群，而且这个群与基本群是同构的。

对多面体而言，一种自然的想法是可以将一条棱道路表示为构成它的各条棱的和，例如

$$v_1v_2v_3v_1v_2=v_1v_2+v_2v_3+v_3v_1+v_1v_2$$

$$= 2v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1$$

注意：采用这种写法时，所用的棱实际上是定向棱，因而认为$v_1v_2 = -v_2v_1$ 是合理的。为了区别起见，我们记定向棱为v_1v_2，记不定向棱为(v_1, v_2)。

第二部分中用基本群证明布劳威尔定理的事实表明，恰当地使用代数方法可使复杂的几何问题简单化。然而要使用代数工具特别是群，必须要有适当的领域和封闭的运算。我们知道道路的乘法是有条件的，需要前一道路的终点是后一道路的起点，也就是说一般的道路（包括多面体的棱道路）不能相乘，即使环路也需有相同基点才能运算，为此我们考虑扩大领域。根据前面对棱道路表示式的启发，我们将棱道路扩展到可以是间断的（这时实际上已不再是道路），每条棱允许重复，允许反向。如果以σ_1，σ_2，…，σ_k表示多面体的所有定向棱（正反定向只取一个），则扩展后的"棱道路"就可表示成它们的整系数的线性组合，即

$$\sigma = \lambda_1\sigma_1 + \cdots + \lambda_k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\sigma_i, \quad \lambda_i \in \mathbf{Z}$$

其中某些 λ_i 可以是0，这每一个线性组合称为

一个 1 维链。对两个 1 维链 $\sigma=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\sigma_i$ 和 $\tau=\sum_{i=1}^{k}\mu_i\sigma_i$ 可自然地引入加法：

$$\sigma+\tau=\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i+\mu_i)\sigma_i$$

显然所有 1 维链在这加法下构成一个群，称为 1 维链群。

我们的主要兴趣在棱环路，它是各棱依次首尾相接的棱道路。根据上述棱道路的扩展，棱环路就相应地扩展到可由若干条不同基点的棱环路并在一起，这种"棱环路"称为1维闭链。怎样用代数形式来表示闭链的特征呢？闭曲线和闭曲面都是没有边缘的几何图形，而一条棱的边缘是它的两个端点，如果用∂表示边缘，则根据解析几何对定向线段的描述，定向棱v_1v_2的边缘可定义为

$$\partial(v_1v_2)=v_2-v_1$$

任意一个 1 维链的边缘可用线性扩张定义为

$$\partial\sigma=\partial\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\sigma_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\partial\sigma_i)$$

这样 1 维链σ是闭链的条件就是$\partial\sigma=0$。容易看出

所有1维闭链在加法下也构成一个群，它是1维链群的子群，称为1维闭链群。

棱环路有非本质的与本质的之分，前者围住了多面体的一个面（2维的），即它是这个面的边缘，后者则不是某个面的边缘。这一区别正是描写多面体结构的核心问题，因为它与多面体本身有密切关系。如在环面T中 $v_1v_4v_7v_1$ 是本质的环路，若考虑实心的环体，则它就是非本质的，因为这时它是一个面的边缘。这一核心思想扩展到1维闭链，就是要区别哪些闭链是边缘，哪些闭链不是边缘。为此要先弄清面的边缘是什么。

多面体的面是多边形，最简单的多边形是三角形，因此可取三角形为最基本的面，多边形可分成几个三角形，故看作为几个面的和。现在一个面指一个三角形，它由三个顶点，如v_1、v_2、v_3，唯一确定，记为(v_1, v_2, v_3)，它的定向由顶点排列次序决定，定向的面记为$v_1v_2v_3$（顶点次序经偶数次置换认为定向不变，经奇数次置换则变为相反定向）。定向面$v_1v_2v_3$的边缘自然地可定义为（图3.3）

$$\partial(v_1v_2v_3)=v_1v_2+v_2v_3+v_3v_1$$

若多面体的所有定向面记为τ_1, …, τ_l（正反定向只取一个），它们的整系数线性组合 $\tau=$

$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\tau$ ($\lambda_i\in\mathbf{Z}$) 称为2维链，2 维链全体构成的群称为 2 维链群。2 维链的边缘可由定向基本面的边缘线性扩张而得，即

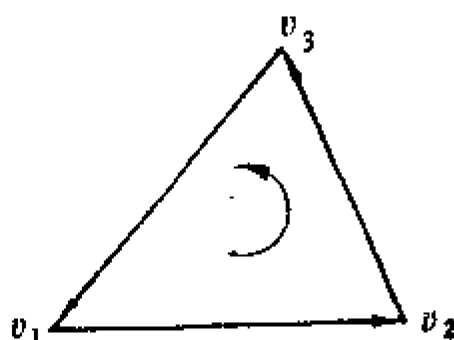


图3.3

$$\partial\tau=\partial\left(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\tau_i\right)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(\partial\tau_i)$$

现在我们可将非本质的棱环路推广如下：若一个 1 维闭链z是某个 2 维链的边缘，即存在一个 2 维链τ使

$$z=\partial\tau$$

则称z是 1 维边缘链。显然全体 1 维边缘链构成群，它是 1 维闭链群的子群，称为 1 维边缘链群。

在作基本群时我们特别关心环路的等价类（同伦类），目的在于将本质上相同的环路，即同伦的环路归于一类，类似地也可对闭链进行分类。在基本群中，若一环路是一片面的边缘，则它同伦于一点，它与点环路属于同一类，于是自然会联想到将所有的 1 维边缘链分在一类(1维零

链属于此类），将它们看作彼此等价的。其次我们观察图3.2中环面T的一个 2 维链 τ，它由下面一段棱柱的三个侧面组成，图 3.4 是将这一段沿棱v_7v_8剪开后摊平的图形，τ 可写成 $\tau = v_7v_8v_2 + v_7v_2v_1 + v_1v_2v_5 + v_1v_5v_4 + v_4v_5v_8 + v_4v_8v_7$，通过计

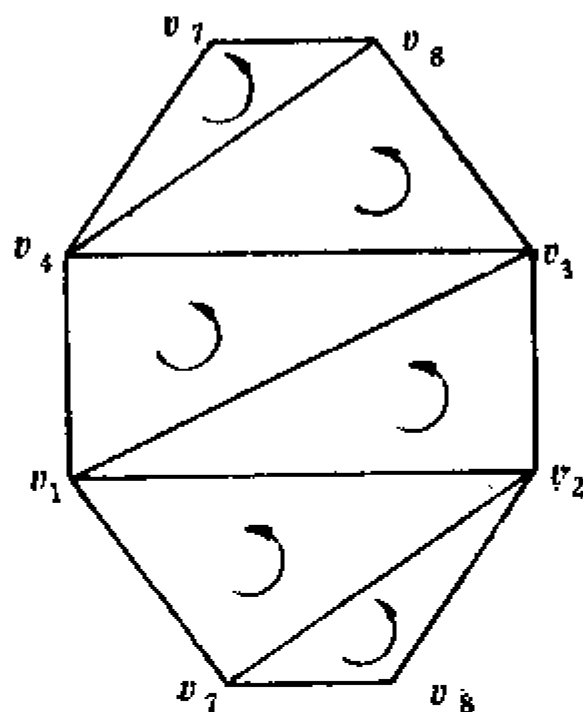


图3.4

算可知它的边缘为$\partial\tau = z_1 - z_2$，其中 $z_2 = v_1v_4 + v_4v_7 + v_7v_1$，$z_1 = v_2v_5 + v_5v_8 + v_8v_2$，显然它们都是闭链，两者之差是 τ 的边缘，然而边缘链是属于零类的，因而可认为z_1，z_2 是属于同一等价类的。也就是说，若两个闭链z_1与z_2之差 $z_1 - z_2$ 是一边缘链，则称z_1与z_2是等价的，也称z_1 同调于z_2，

记为 $z_1 \sim z_2$，显然这是个等价关系，因而1维闭链群被这等价关系分成一些等价类，称为同调类，z所属同调类记为$[z]$，它们在自然的加法下构成一个群，称为1维同调群。实际上上述所说在代数上是很简单的，既然将边缘链群作为一类，那末同调群就是闭链群对边缘链群的商群。

显然1维同调群也可用来刻画二维的洞，它与基本群的差别在于，同调群是交换群，而基本群一般不是交换群；1维同调群是从1维链与0维和2维链的联系上来考虑的，而基本群主要着眼于1维环路本身考虑问题。它们之间的联系是：基本群的交换化就是1维同调群。

上面所述的1维同调群的思想很容易通过相同的步骤推广到二维的情形，从而构作出刻画三维洞的2维同调群，需要补充的只有一点：三维基本几何体和它的定向、边缘的定义。

最简单的三维几何体是由四个顶点决定的四面体，由它担任多面体中的三维基本几何体是最称职的。类似于二维的情形，它的定向可由顶点排列次序来确定，即由v_1，v_2，v_3，v_4确定的四面体(v_1, v_2, v_3, v_4)的一个定向是$v_1v_2v_3v_4$，顶点次序偶数次置换后定向不变，奇数次则得相反定向。它的边缘是四个定向面的和，要求从四面

体内看时，这四个面的定向是一致的，即都是顺时针的或都是逆时针的，为此取

$$\partial(v_1v_2v_3v_4)=v_2v_3v_4-v_1v_3v_4+v_1v_2v_4-v_1v_2v_3$$

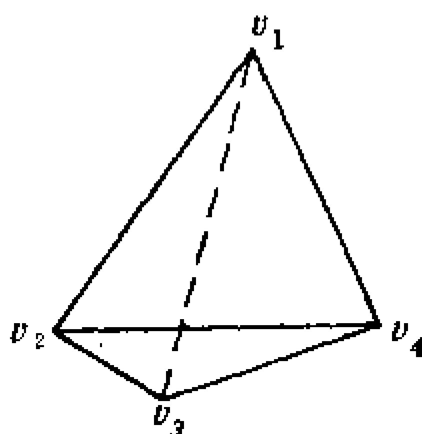


图3.5

至于一般3维链的边缘只需将此边缘作线性扩张即可。

现在我们引入一些术语和符号使同调群的叙述规范化。

在R^3中，一个点称为0维单形，两个点决定的闭线段称为1维单形，不共线的三点决定的三角形称为2维单形，不共面的四点决定的四面体称为3维单形。对3维单形，任取三个顶点可构成一个2维单形，任取两个顶点可构成1维单形，每个顶点都是0维单形，这些都称为3维单形的面，1维面也称棱，0维面就是顶点。对2维和1维单形可类似地定义它们的面。

若R^3中的两个单形（维数不一定要相同）或者不相交，或者相交于一个公共面，则称这两个单形是很好相处的（如图3.7，其中相同字母表示同一单形的顶点）。容易看出，每个单形的任

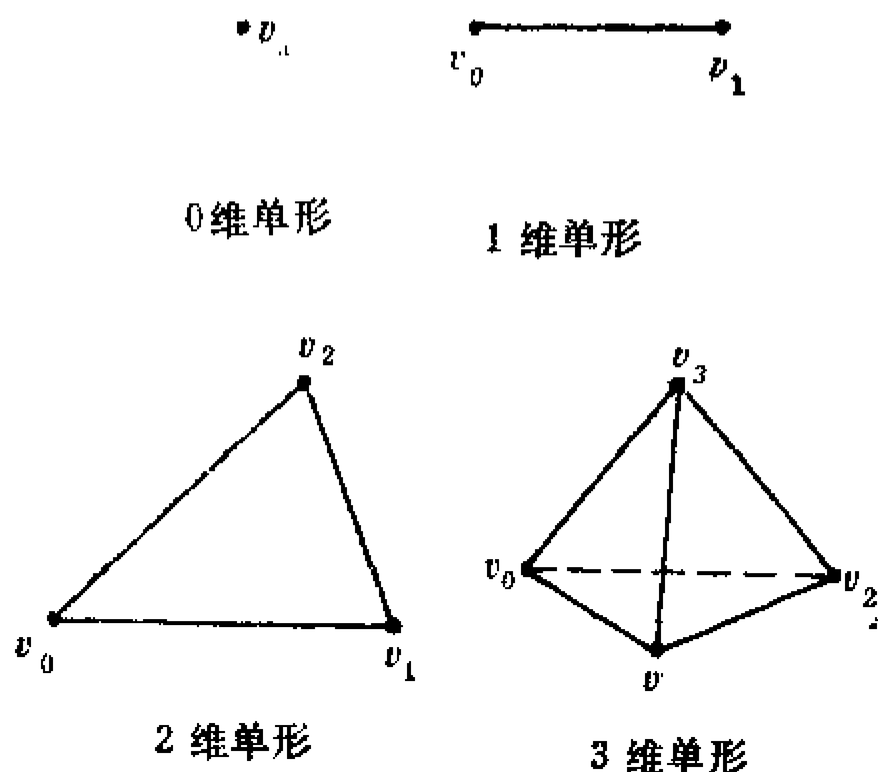


图3.6

意二个面(单形)总是很好相处的。

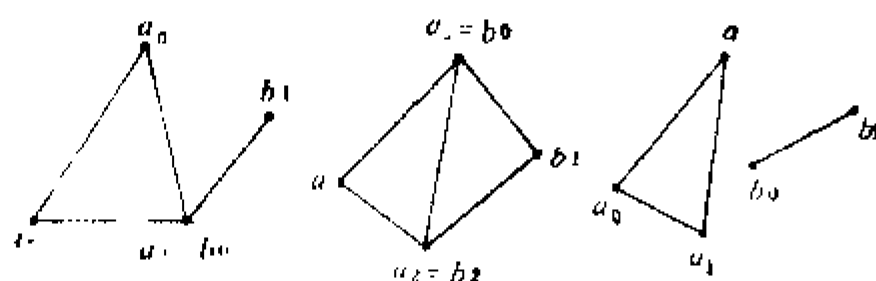
设K是R^3中有限多个单形的集合，如果K满足条件

1°若某个单形 $s\in K$,则s的所有面也属于K。

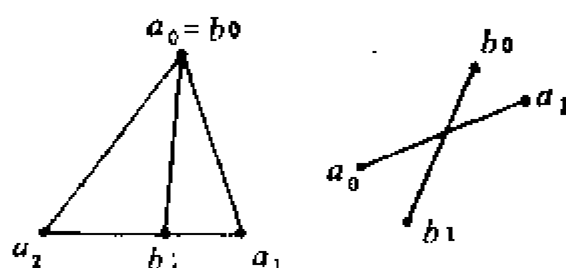
2°K的任意两个单形都是很好相处的。

则称K是一个单纯复形，简称复形。K中所有单形的最高维数称为复形K的维数。若复形$L\subset$复形K，称L是K的子复形。

设K是复形，它的所有元素的并集是R^3中的一个子集，记为$|K|$，称作复形K相应的多面体



（1）很好相处



（2）非很好相处

图3.7

（注意：K的元素是单形，而 |K| 的元素是点）。

严格说来，前面说的同调群实际上应是指复形K的同调群．通常将复形 K 的q维链群记为 $C_q(K)$，q维闭链群记为$Z_q(K)$，q 维边缘链群记为 $B_q(K)$，q维同调群记为$H_q(K)$，这样

$$H_q(K)=Z_q(K)/B_q(K).$$

为什么前面常说多面体的同调群呢？这一点在下节说明。

3. 例和说明

通过以下几个例子可以看出怎样用直接的方法计算同调群，这些例子算得的同调群将在布劳威尔定理的证明中用到。

例 1 若复形K的多面体是道路连通的，则$H_0(K)\simeq\mathbf{Z}$。

证明 设v、w是K的任意两个顶点，则必定存在 1 维单形vv_1，v_1v_2，$\cdots$，v_kw，因而$\partial(vv_1+v_1v_2+\cdots+v_kw)=w-v$，故$v\sim w$，即任意二个 0 维单形同调。同时不难看出，单个顶点的非零整数倍不是任何 1 维链的边缘，因而$H_0(K)\cong\mathbf{Z}$。

今后我们讨论的一般都是此类复形。

例 2 复形K由 3 维单形$v_0v_1v_2v_3$及其所有的面构成，求K的各维同调群。

首先，$|K|$是道路连通的，由例 1 知$H_0(K)\cong\mathbf{Z}$。其次，K只有一个 3 维单形，但它不是闭的，故有$\mathbf{Z}_3(K)=0$，从而$H_3(K)=0$。

K有 6 个 1 维单形，若 1 维链

$$z=av_0v_1+bv_0v_2+cv_0v_3+dv_1v_2+ev_2v_3+fv_3v_1$$

是闭链，则$\partial z=0$，将上式右边求边缘并等于0，则得系数满足方程

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-d+f=0 \\ b-e+d=0 \\ c-f+e=0 \end{cases}$$

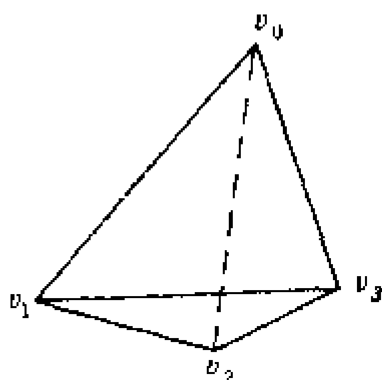


图3.8

这四个方程中第一个是不独立的，将$a=d-f$，$b=e-d$，$c=f-e$代入z的表示式，整理后得

$$z=d(v_0v_1+v_1v_2+v_2v_0)+e(v_0v_2+v_2v_3+v_3v_0)+f(v_0v_3+v_3v_1+v_1v_0)$$

即K的每个1维闭链z总取上述形式，然而它却是边缘链，因为右边每个括号内都是边缘链，这就是说，K的1维闭链都是边缘链，这样闭链同调类只有一个零类，故$H_1(K)=0$。

K有4个2维单形，若2维链

$$z=av_1v_2v_3+bv_0v_2v_3+cv_0v_1v_3+dv_0v_1v_2$$

是闭链，用上面同样的方法计算$\partial z=0$可得系数方程$a+b=0$，$a-c=0$，$a+d=0$,$c+d=0$,$b-d=0$，$c+b=0$,后三个方程是不独立的，将前三个方程的结果$a=-b=c=-d$代入z的表示式，得到

$$z = a(v_1v_2v_3 - v_0v_2v_3 + v_0v_1v_3 - v_0v_1v_2)$$

它也是边缘链（因为右边括号内是3维单形$v_0v_1v_2v_3$的边缘），因而$H_2(K) = 0$。

小结：$H_0(K) \cong \mathbf{Z}, H_1(K) = H_2(K) = H_3(K) = 0$。

例 3　L是由3维单形$v_0v_1v_2v_3$的所有2维、1维和0维面所构成的复形，求L的同调群。

现在L是2维复形，与例2完全一样可求得$H_0(L) \cong Z$和$H_1(L) = 0$。对2维同调群，与例2一样可知它的任一2维闭链均取形式

$$z = a(v_1v_2v_3 - v_0v_2v_3 + v_0v_1v_3 - v_0v_1v_2)$$

因此$Z_2(L) \cong \mathbf{Z}$，由于L没有3维单形，故不存在2维边缘链（上式右边括号内形式上象边缘链，因为没有3维单形，所以它不是边缘链，只是一个2维闭链），即$B_2(L) = 0$，这样$H_2(L) \cong Z_2(L) \cong \mathbf{Z}$。

现在我们给出一个定义：设X是拓扑空间，若存在复形K和同胚h: $|K| \to X$，称X是可单纯剖分的，(K, h)称为它的一个单纯剖分。

球面S^2，闭球体B^3，环面T等都是可单纯剖分的，但并不是每个空间都能剖分的，即使是R^3中的简单图形也未必都能剖分，如开区间(0, 1)就不能单纯剖分，因为(0, 1)不是R^3中的

闭集，而R^3中的复形K的多面体$|K|$总是有界闭集，故不能与（0，1）同胚。现在我们感兴趣的则是可单纯剖分的这类特殊空间。

最后作几点说明：

1° 除独点空间外，可剖分空间的单纯剖分不是唯一的。例如球面可用内接于它的四面体的表面取为L（严格地说是例3中的复形L），取h为径向投影可得单纯剖分$(L,\ h)$，也可取内接正方体的表面，并将每个正方形划分成两个三角形，所得复形记为K，h同样取径向投影，可得球面的另一单纯剖分$(K,\ h)$。

2° 既然可剖分空间的单纯剖分不是唯一的，就会产生这样一个问题：若$(K,\ h)$和$(L,\ g)$是X的两个单纯剖分（这时有$|K|\cong X$，$|L|\cong X$，从而$|K|\cong|L|$），K和L的同调群是否一致？令人庆幸的是下述定理成立：

定理 若复形K和L满足$|K|\simeq|L|$，则K和L的各维同调群分别同构。

根据这一定理，若$(K,\ h)$是X的单纯剖分，我们就可将K的同调群说成是X的同调群，记为$H_q(X)$，它与单纯剖分的取法无关。例2和例3的结果可写成$H_0(B^3)\cong\mathbf{Z}$，$H_1(B^3)=H_2(B^3)=H_3(B^3)=0$；$H_0(S^2)\cong\mathbf{Z}$，$H_1(S^2)=0$，$H_2(S^2)\cong$

Z. 因此人们常将可剖分空间X说成是多面体X. 多面体的同调群可通过适当的单纯剖分实际计算。

3° 我们对边缘的性质再说几句话. 为了完备起见，对0维单形的边缘定义为0。通过简单的直接计算，可知对每个单形s都有$\partial^2 s=\partial(\partial s)=0$，由于边缘$\partial$是线性的，因而对每个$q$维链$\sigma$都有

$$\partial^2\sigma=\partial(\partial\sigma)=0$$

对每个q维链σ，$\partial\sigma$是$q-1$维链，∂又是线性的，因而

$$\partial: C_q(K)\rightarrow C_{q-1}(K)$$

是链群间的同态，称为边缘同态。

4. 三维布劳威尔不动点定理的证明

本部分第1节中已经指出，证明三维布劳威尔定理3.2的关键是证明定理3.1。现在我们已对每个多面体建立了一组同调群，它可用来反映多面体各维洞的特征，要证明定理3.1，如同第二部分第3节中利用基本群证明二维布劳威尔定理一样，还需要一座桥梁，即从映射$f: |K|\rightarrow|L|$能诱导出同调群之间的同态$f_{*q}: H_q(K)$

$\to H_q(L)$。这座桥是能建造的，它的结论是下面的定理3.3。然而此桥的构作并不象基本群中那么简单，那么直截了当，为此我们把“筑桥”过程的概要放在本节稍后一点叙述，供有兴趣的读者阅读。

定理3.3 多面体之间的连续映射 $f: |K| \to |L|$ 可诱导出它们的同调群之间的一列同态 $f_{*q}: H_q(K) \to H_q(L)$，它具有下列性质：

1° 设$g: |L| \to |M|$也是连续映射，则复合映射的诱导同态是诱导同态的复合，即

$(g\circ f)_{*q} = g_{*q}\circ f_{*q}: H_q(K) \to H_q(M)$

2° 恒同映射$id_{|K|}$的诱导同态是恒同同构。

3° 若 $f\simeq g: |K| \to |L|$，则$f_{*q} = g_{*q}$，也就是说，同伦的映射诱导出相同的同态。

定理3.1的证明 若存在保核收缩映射 $r: B^3 \to S^2$，令$i: S^2 \to B^3$是内含映射，由

$$S^2 \xrightarrow{i} B^3 \xrightarrow{r} S^2$$

可得到同调群之间相应的诱导映射（现在我们只需用2维的）：

$$H_2(S^2) \xrightarrow{i_{*2}} H_2(B^3) \xrightarrow{r_{*2}} H_2(S^2).$$

因为i是内含映射，r是保核收缩映射，因此对每个$x\in S^2$有$r\circ i(x) = x$，即$r\circ i$是S^2上的恒等映射，根据定理3.3的2°，$r_{*2}\circ i_{*2}$应是恒同同构，于

是 r_*，必须是到上的同态，然而 $H_2(B^3)=0$，$H_2(S^2)\cong \mathbf{Z}$，这与r_*，是到上的同态是矛盾的，从而定理成立，即S^2不可能是B^3的收缩核。□

定理 3．2 的证明　倘若 B^3 不具有不动点性质，那么就存在连续映射$f: B^3\to B^3$，它不具有不动点。对每一$x\in B^3$，以$f(x)$为起点，作通过x的射线，这射线与B^3的边界球面S^2必交于一点，记为x'。作一映射$g: B^3\to S^2$，$x\mapsto x'$，则g使S^2 上的点每点不动，且由f的连续性可得g是连续的，这样映射g就是B^3到S^2 的一个保核收缩映射，与定理 3．1 矛盾，因此定理成立。 □

这样就完成了三维布劳威尔不动点定理的证明。现在我们可将这一证明与第二部分第 3 节中对二维布劳威尔定理的证明作一比较。首先我们看到，三维情形下定理3.1和3.2的证明与二维情形下定理 2．3 和 2．1 的证明几乎是相同的，它们都是利用代数工具和代数方法，将困难的几何问题化成代数问题，然后用简单的代数思想加以解决。其次，二维时使用的基本群与三维中引入的同调群在构作上也有类似的思想，它们都着重考察闭的对象——环路和闭链，核心的问题是对它们进行分象（一个按同伦分类，一个按同调分类），同伦于一点的环路与边缘链扮演了类似

的角色。同伦论和同调论是代数拓扑中的两个重要组成部分，然而可以看到，在建造同调群时代数工具使用得更为充分，它从各维结构的联系上对拓扑空间刻画得更为细致，因而它在现代数学中作用更为重要。

现在我们再回到前面，看看定理3.3这一桥梁是怎样建立起来的。

若K和L是两个复形、要建立它们同维同调群$H_q(K)$和$H_q(L)$之间的一个同态，只需建立链群$C_q(K)$和$C_q(L)$之间的同态，它满足条件：将闭链映到闭链，边缘链映到边缘链，这种链群间的映射通常叫作链映射，链映射可以通过自然的方法得到同调群之间的同态。然而并不是多面体之间的一般的连续映射f: $|K|\to|L|$ 都能直接导出链映射的，因而需要借助特殊的映射作为过渡，然后再利用这种映射去“迫近”f（这是数学中的常用方法）。

对这种特殊映射φ: $|K|\to|L|$，我们可直截了当地要求它把K的每个单形线性地映满L的某个单形（维数允许降低），这种映射称为单纯映射。这就是说，单纯映射φ: $|K|\to|L|$是满足下列条件的映射：1°若s是K的单形，则$\varphi(s)$是L的单形，2°设s的顶点是v_0，v_1，…，v_k，若将

$x \in s$ 用顶点线性地表示为 $x=\lambda_0 v_0+\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_k v_k$，则 $\varphi(x)=\lambda_0\varphi(v_0)+\lambda_1\varphi(v_1)+\cdots+\lambda_k\varphi(v_k)$（根据1°，$\varphi(v_i)$是$\varphi(s)$的顶点）。于是一个单纯映射$\varphi$被它在$K$的所有顶点上的值所完全确定。单纯映射$\varphi$可导出链群间的映射$\varphi_q$，它在$K$的定向单形$v_0v_1\cdots v_k$上的值定义为

$$\varphi_q(v_0v_1\cdots v_k)=\begin{cases}\varphi(v_0)\varphi(v_1)\cdots\varphi(v_k), \\ \qquad \varphi(v_i)\text{各不相同时} \\ 0,\ \text{存在}i\neq j,\varphi(v_i)=\varphi(v_j)\text{时}\end{cases}$$

然后线性扩张为φ_q: $C_q(K)\to C_q(L)$。则φ_q 是一列同态，且是链映射，因而能得到同调群之间的映射$\varphi_{*q}:H_q(K)\longrightarrow H_q(L)$。

由于我们现在是以单形作单位来考虑问题，因此可这样来描写"逼近"：一个连续映射$f:|K|\to|L|$很"接近"于单纯映射 φ: $|K|\to|L|$ 是指：对每个$x\in|K|$，$f(x)$与$\varphi(x)$ 总在L的同一单形内。说得更确切一点是：设 f: $|K|\to|L|$ 是连续映射，φ: $|K|\to|L|$ 是单纯映射，若对任一 $x\in|K|$，当$f(x)\in\mathring{s}$（s 的内部），$s\in L$ 时，必有$\varphi(x)\in s$，则称φ是f的单纯逼近。容易利用直线同伦证明：若φ是 f的单纯逼近，则$\varphi\simeq f$。

例1　设在R中$a_0=0$，$a_1=\frac{\pi}{2}$，$a_2=\pi$，复形K

$=\{a_0, a_1, a_2, (a_0, a_1), (a_1,a_2)\}$，在$R^2$中$b_0=(0, 0)$，$b_1=\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$，$b_2=(\pi, 0)$，$b_3=\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，复形$L=\{b_0, b_1, b_2, b_3, (b_0, b_1), (b_1, b_2), (b_0, b_3), (b_1, b_3), (b_2, b_3), (b_0, b_1, b_3), (b_1, b_2, b_3)\}$，映射$f: |K| \to |L|$由$f(x)=(x, \sin x)$给出。令$\varphi: |K| \to |L|$为：$\varphi(a_i)=b_i$，$i=0, 1, 2$，然后线性扩张到$|K|$，则$\varphi$是$f$的单纯逼近。验证（见图3.9）：$x=a_0$、$a_2$，$f(x)=\varphi(x)$均是顶点（0维单形）；$x=a_1$，$f(x)\in(b_1, b_3)^\circ$，$\varphi(x)=b_1\in(b_1, b_3)$；$0<x<\frac{\pi}{2}$，$f(x)\in(b_0, b_1, b_3)^\circ$，$\varphi(x)\in(b_0, b_1, b_3)$；$\frac{\pi}{2}<x<\pi$，$f(x)\in(b_1, b_2, b_3)^\circ$，$\varphi(x)\in(b_1, b_2, b_3)$。因此

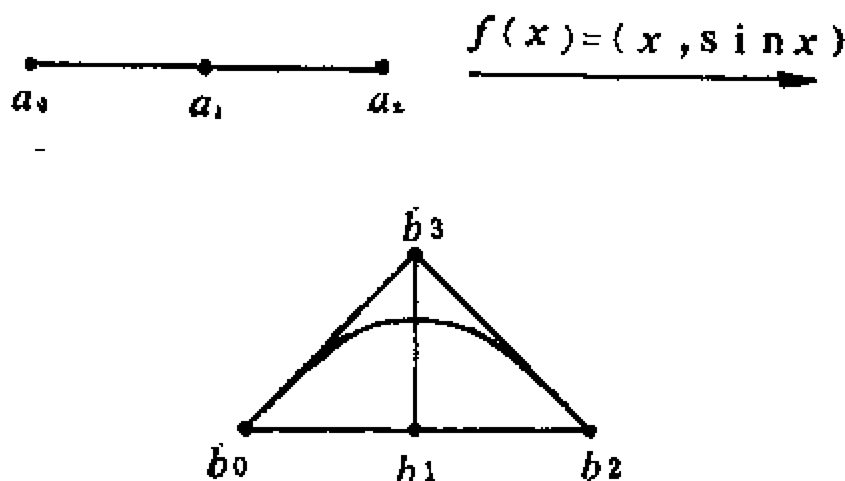


图3.9

φ是f的单纯逼近。另外若令$\psi(a_0)=b_0$，$\psi(a_1)=b_3$，$\psi(a_2)=b_2$，再作线性扩张，则ψ也是f的单纯逼近。因而若存在单纯逼近，未必是唯一的。

然而并不是每个连续映射都具有单纯逼近。

例2　在R中设$a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=2$，复形$K=\{a_0, a_2, (a_0, a_2)\}$，复形$L=\{a_0, a_1, a_2, (a_0, a_1), (a_1, a_2)\}$，映射$f: |K| \to |L|$由$f(x)=x$给出，则$f$不存在单纯逼近。因为$f(a_0)=a_0$和$f(a_2)=a_2$均是$L$的顶点，但不是同一单形的顶点，因而不可能存在单纯逼近将K的单形(a_0, a_2)映到L的一个单形。

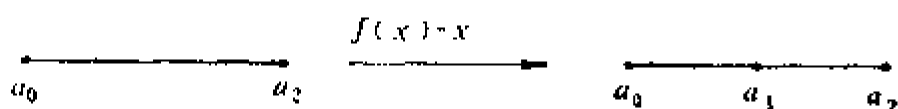


图3.10

从例2中可以看出，f不存在单纯逼近的原因是K的单形(a_0, a_2)"太大"了。因此我们就要考虑将$|K|$分得"细一点"。"分细"的方法很多，最简单而又规则的办法是，将K的每一个单形的重心增加为顶点，并将一个单形的重心与它所有面的重心（包括原来的顶点，因为它是0维单形本身的重心）相联，这样就将K"分细"了，"分细"后所得新的复形称为K的重心

重分，记为K^1。如将K^1再重心重分所得复形称为K的2次重心重分，记为K^2，余此类推得K的m次重心重分K^m。图3.11表示了1维和2维单形的1次和2次重心重分，3维单形的重心重分可

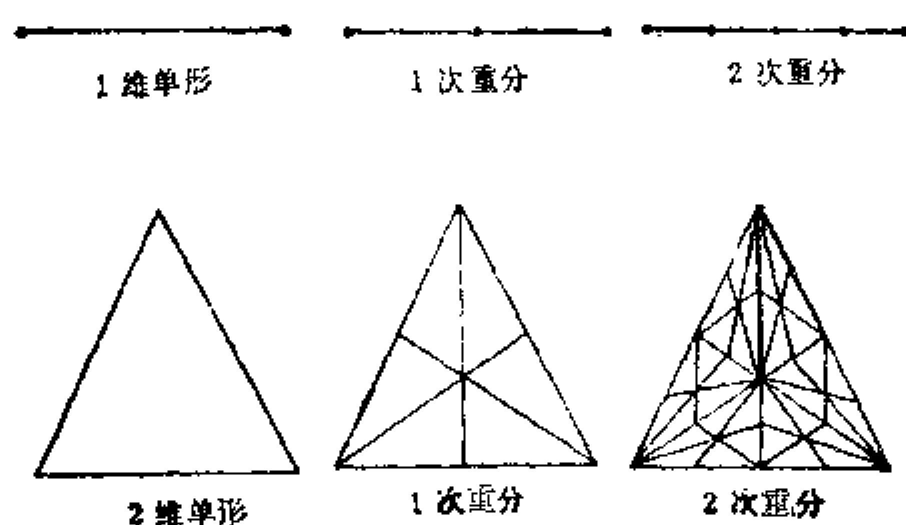


图3.11

类似地得到。当m相当大，K就被分得很细. 可以证明：给出多面体之间的连续映射f: $|K| \to |L|$，则存在一个相当大的正整数m，使f: $|K^m| \to |L|$有单纯逼近φ: $|K^m| \to |L|$。

对于K的重心重分K^1，容易建立一个重分链映射$\chi_q: C_q(K) \to C_q(K^1)$，若$s$是$K$的一个$q$维定向单形，$v$是它的重心，它与重分后的$s$的边缘上每个$q-1$维定向单形可构成一个$q$维定向单形，则$\chi_q(s)$是这些$q$维单形的和。例如，若$v_0v_1 \in K$，$v$是

它的重心，则$\chi_1(v_0v_1)=v_0v+vv_1$；若v是$v_0v_1v_2\in K$的重心，u_0，u_1，u_2分别是v_0v_1，v_1v_2，v_2v_0的重心，则$\chi_2(v_0v_1v_2)=vv_0u_0+vu_0v_1+vv_1u_1+vu_1v_2+vv_2u_2+vu_2v_0$（如图3.12）。可证重分链映射$\chi_q$确实是链映射。重复这样做可得到$K^m$的$K^m$重分链映射。

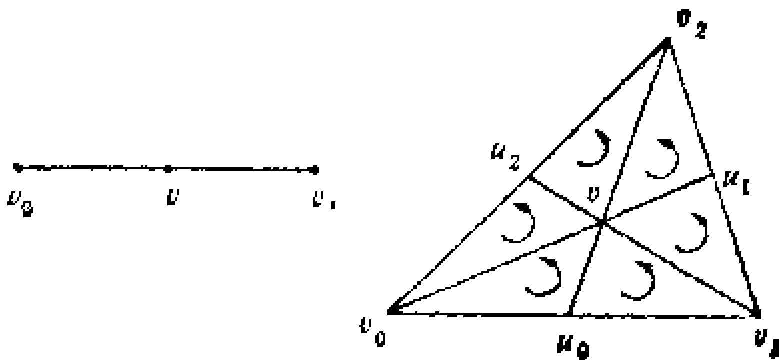


图3.12

最后，给出多面体的连续映射f: $|K|\to|L|$，对足够大的m有单纯逼近φ: $|K^m|\to|L|$，它诱导出链映射φ_q，再加重分链映射χ_q，即有

$$C_q(K)\xrightarrow{\chi_q}C_q(K^m)\xrightarrow{\varphi_q}C_q(L)$$

它又诱导出同调群之间的同态：

$$H_q(K)\xrightarrow{\chi_{*q}}H_q(K^m)\xrightarrow{\varphi_{*q}}H_q(L)$$

记$f_{*q}=\varphi_{*q}\circ\chi_{*q}$，称$f_{*q}$是由映射$f$所诱导的同调群之间的同态，可以证明它与$m$和单纯逼近$\varphi$的取法无关，而且满足定理3.3中的三个性质。

对定理3·3的详细论述可见[13]第三章。

5. 几点附注

这一节对本部分前几节所涉及的内容作几点附注。

1）一些常见空间圆S^1、闭圆盘B^2、球面S^2、闭球体B^3、环面T和射影平面P^2的同调群如下：

多面体	S^1	B^2	S^2	B^3	T	P^2
$H_0(\cdot)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
$H_1(\cdot)$	$\mathbf{Z}$	O	O	O	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$
$H_2(\cdot)$	O	O	$\mathbf{Z}$	O	$\mathbf{Z}$	O
$H_3(\cdot)$	O	O	O	O	O	O

其中$\mathbf{Z}_2$表示模为 2 的整数群。

射影平面P^2又称 2 维射影空间，它可由下面三种等价的方法得到：1°取球面S^2，将它的每对对径点看成一个类，这些类的全体构成的空间就是P^2。这种作法通常称为“将S^2的每对对径点粘合起来”；2°取闭圆盘B^2，将其边界圆S^1的每对对径点看成一个类，B^2内部的点每点为一个类，这样构成的空间也是P^2；3°将$R^3-\{O\}$中过原点

的一条直线上的点看成一个等价类，所有这些等价类所成的空间也是P^2.

2）n 维同调群和它的结构　节2中将1维同调群推广到2维同调群的方法显然可平行地运用于推广到n维同调群，所缺的只是n维单形及其定向、边缘的定义. R^n 中 $n+1$ 个不在同一超平面内的点决定的多面体称为n 维单形，它的定向用顶点的次序来决定. n维定向单形$v_0v_1\cdots v_n$的边缘定义为

$$\partial(v_0v_1\cdots v_n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i v_0v_1\cdots v_{i-1}v_{i+1}\cdots v_n$$

下面的定理表示一般复形的同调群的结构.

定理　n维复形K的q维同调群可唯一地分解为

$$H_q(K)=\underbrace{\mathbf{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}}_{\beta_q\text{个}}\oplus\mathbf{Z}_{\theta^1_q}\oplus\mathbf{Z}_{\theta^2_q}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}_{\theta_q^{\tau_q}}$$

其中$\beta_q\geqslant 0$，$\mathbf{Z}_{\theta^i_q}$ 表示模为θ_q^i的整数群，且当$\tau_q>0$时，θ_q^i整除θ_q^{i+1}.

β_q 称为K的 q 维佩蒂数，它的几何意义是反映了$|K|$中由 q 维链所围独立的“洞”的个数.

3）欧拉示性数及其与佩蒂数的关系　设K是n维复形，它的q维单形的个数为α_q，K的欧拉示

性数，记为$\chi(K)$，定义为

$$\chi(K)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\alpha_{i}$$

庞加莱证明了欧拉示性数与佩蒂数有如下关系：

$$\chi(K)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\beta_{i}$$

4）n 维布劳威尔不动点定理　下面的n 维布劳威尔定理成立。

定理　n维闭球B^n具有不动点性质。

它的证明与本章对 3 维的证明完全类似。首先求得B^n和S^{n-1}的同调群分别是

$H_0(B^n)\cong\mathbf{Z}$，$H_q(B^n)=0$，$q>0$；

$H_0(S^{n-1})\cong\mathbf{Z}$，$H_{n-1}(S^{n-1})\cong\mathbf{Z}$，

$H_q(S^{n-1})=0$，$q\neq0$、$n-1$。

其次利用这结果和定理3.3证得“S^{n-1}不是B^n的收缩核”。最后证得B^n具有不动点性质。

布劳威尔定理除本章介绍的用代数拓扑方法的证明以外，也可用映射度的方法加以证明（见第六部分定理 6.2），甚至还能通过行列式和微积分这些古典方法证得（见[16]§V.10）。

5）布劳威尔定理的等价形式　首先引入一

个概念：若拓扑空间X到自身的恒等映射id同伦于X的一个常值映射g（即$\forall x\in X, g(x)=x_0\in X$），则称$X$是可缩（成$X$中的一点$x_0$）的。可缩的空间一定是单连通的，但单连通的空间未必一定是可缩的。

下面的定理给出了布劳威尔定理的等价形式，它的证明可见〔14〕第四章。

定理 下列结论等价：

1° S^{n-1}不是可缩的，即恒等映射$id: S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}$不同伦于常值映射。

2° （Bohl定理）任一连续映射$f: B^n\longrightarrow R^n$必有下列两个性质之一：

(i) f有一不动点；

(ii) 存在一点$x\in S^{n-1}$，使得对某一$\lambda\in(0, 1)$有$x=\lambda f(x)$。

3° 每一连续映射$f: B^n\longrightarrow B^n$至少有一个不动点。

4° 不存在保核收缩$r: B^n\to S^{n-1}$

6）R^n中其他具有不动点性质的子集　在第二部分中我们引入了收缩核，它有一个很好的性质。

定理 若X具有不动点性质，Y是X的收缩核，则Y也具有不动点性质。

证明 设$r:X\to Y$是保核收缩映射，f是Y到自身的任一连续映射，则$f\circ r$是X到自身的一个连续映射，因而具有不动点w，即$f(r(w))=w$，显然$w\in Y$，由Y是X的收缩核可知$r(w)=w$，从而$f(w)=w$，w是f的不动点。□

在第二部分第3节例1中曾说明长有一条一维腿的圆盘是大圆盘的收缩核，而大圆盘具有不动点性质，因而它也具有不动点性质。同样可证长有若干条一维腿的圆盘也是大圆盘的收缩核，故也具有不动点性质。一般说来，证明某个子集X是一个很大的闭球$B^n(k)$的收缩核，是证明X具有不动点性质的一个办法。

布劳威尔从B^n是R^n中的有界闭的凸子集这一角度出发，首先证明了下述定理：

定理 R^n中每个有界闭的凸子集具有不动点性质。

证明要点 首先证明X是R^n中任一比其较大的子集Y的收缩核，为此这样作保核收缩映射$r:Y\to X$，对任一$y\in Y$，由于X是有界闭的凸子集，故可找到一点$x\in X$，使x到y的距离最小，取此x为$r(y)$。

然后由X的有界性，可取足够大的$k>0$，使以k为半径的闭球$B^n(k)\supset X$，$B^n(k)$具有不动点

性质，X是$B^n(k)$的收缩核，故也具有不动点性质。

球体B^n是有界闭的，而且是可缩的，这只需利用直线同伦就能证明。人们当然就会考虑R^n中的有界闭的可缩子集是否具有不动点性质，1953年Kinoshita 举出了一个反例（见〔17〕），从而作出了否定的结论。然而若再加上一个"局部可缩"的条件，则得到肯定的结论，即有

定理 若X是R^n中的有界闭的、可缩且局部可缩的子集，则X具有不动点性质。

所谓局部可缩是指：若对X的每一点x和x的每一个邻域U，都存在x的邻域$V\subset U$，使V是可缩的，则称X是局部可缩的。注意：可缩与局部可缩这两概念是互不包含的，如S^1是局部可缩的，但不是可缩的，图3.13所示的无限齿的"篦式空间"是可缩的（每根齿缩到底线〔0,1〕，底线再

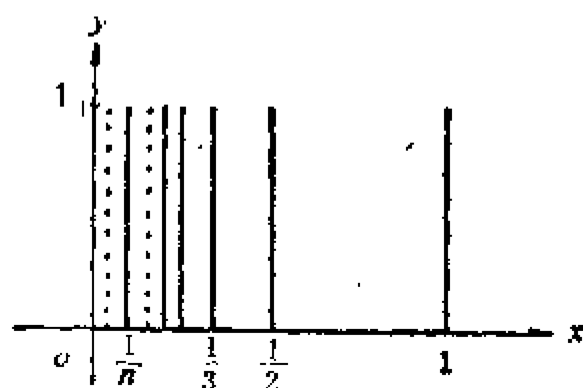


图3.13

缩成一点），但不是局部可缩的，因为若在 y 轴上取点$(0, \frac{1}{2})$，它的邻域中不存在可缩的邻域。

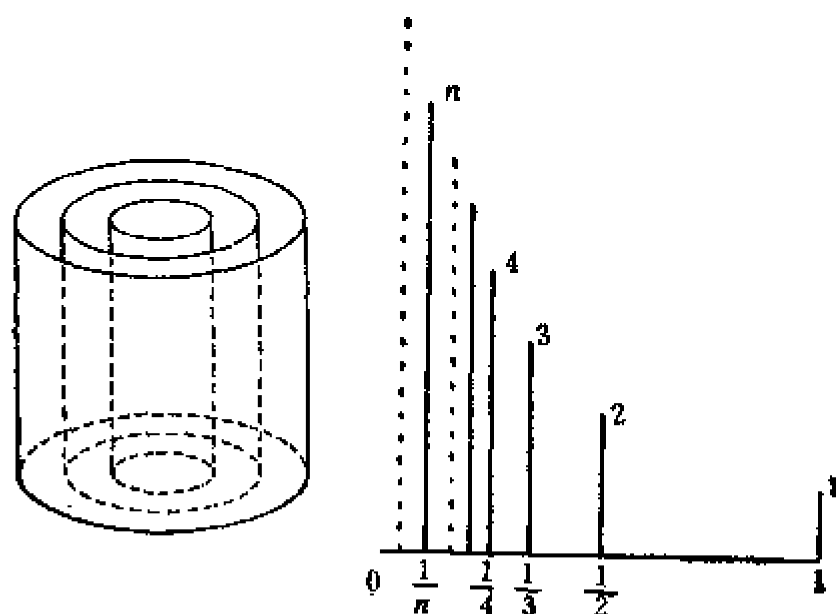
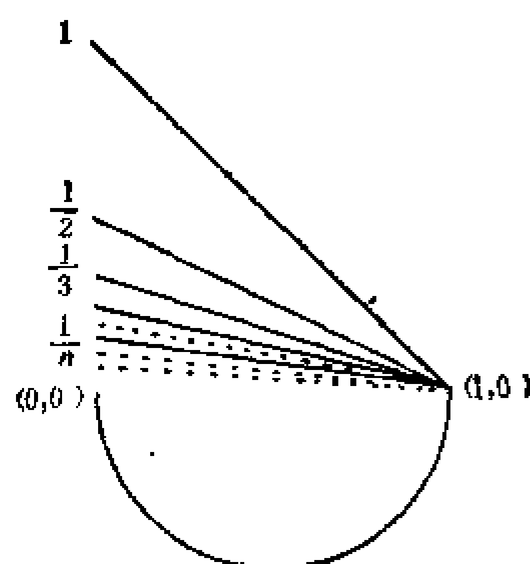


图3.14　　　　　　3.15



3.16

根据这一定理，可知有限齿的"篦式空间"具有不动点性质．还有如图3.14所示，X是由一个水平闭圆盘，一个以此圆盘的边界为基准的单位高圆柱面以及有限个落到圆盘的单位高的同心圆柱面所构成，则X是有界闭的，且可缩和局部可缩的，因而具有不动点性质．

然而这一定理只是充分的，而不是必要的，甚至其中三个条件"有界闭"、"可缩"和"局部可缩"中每一个都不是必要的．刚才说过图3.13所示子集不是局部可缩的，图3.15所示子集不是有界的，图3.16所示子集不是可缩的，但是可以证明这三个子集都具有不动点性质（见[15]第3章）。

四 一般空间上的不动点定理



前面几部分，我们都限制在欧氏空间的单位球上考察连续自映射的不动点定理，先是一维，后是二维，最后是三维情形，其方法可推广至任何 n 维的欧氏空间 R^n。这一章，我们将考察一般的空间（距离空间、希尔伯特空间、线性赋范空间）上某些映射的不动点问题。由于欧氏空间也是希尔伯特空间和线性赋范空间，本章后半部分内容可以看成是 R^n 上布劳威尔不动点定理的推广。

1. 数学分析中的一个习题

在数学分析课程的极限理论部分，柯西收敛准则是一个重要内容：

定理（柯西收敛准则） 设有数列 $\{a_n\}$，$\{a_n\}$

收敛的充要条件是：对任意的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，当$n>N$时，对任何自然数p，总有$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$成立。

这一定理的好处是可以通过$\{a_n\}$中各项彼此间的关系来判断$\{a_n\}$是否收敛，而不必事先知道极限值．有这种性质的收敛数列亦称柯西列。

学完此定理后，常有以下的一个习题：

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有定义，若对任意的$x\in[0,1]$，满足$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，且对任意的$x$，$y\in[0,1]$有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant a|x-y|,\ 0<a<1$$

则必存在唯一的x_0，使$f(x_0)=x_0$，即$f(x)$有唯一的不动点。

这一习题很象一维的布劳威尔不动点定理，但这里不仅要求$f(x)$连续，还要求$f(x)$是压缩的（压缩可推出连续），即任意两点函数值之差的绝对值，严格小于这两自变量之差的绝对值。这一压缩性质的要求，形成了另一种风格的不动点定理。

此习题中的$f(x)$也是自映射$(0\leqslant f(x)\leqslant 1)$，故迭代方法可以用，任取$x_0\in[0,1]$记$x_{n+1}=f(x_n)$，则$0\leqslant x_n\leqslant 1$.我们自然要问$x_n$是否收敛？显然有

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant\alpha|x_n-x_{n-1}|=\alpha|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|\leqslant\alpha^2|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

反复应用此不等式可知

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\alpha^n|x_1-x_0|$$

今对任何正整数p，考察

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant(\alpha^{n+p-1}+\alpha^{n+p-2}+\cdots+\alpha^n)|x_1-x_0|$$

$$=\frac{\alpha^n-\alpha^{n+p}}{1-\alpha}|x_1-x_0|<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1-x_0|$$

其中$|x_1-x_0|$是定数，$0<\alpha<1$，当$n\to\infty$时$\alpha^n\to 0$，故$\{x_n\}$满足柯西收敛准则，即x_n收敛，设其收敛于x^*，由于f的压缩性可以导出函数的连续性，由

$$x_n=f(x_{n-1}),\quad n=1,2,\cdots$$

可知$x^*=f(x^*)$，x^*是不动点。

再证x^*是唯一的不动点。设若不然，另有一不动点x^{**}，则

$$|x^*-x^{**}|=|f(x^*)-f(x^{**})|\leqslant\alpha|x^*-x^{**}|$$

其中$0<\alpha<1$。这只有在$|x^*-x^{**}|=0$时才成立，即$x^*=x^{**}$。

这一习题启示我们，一维的布劳威尔定理如果对f的连续性加强为压缩性，不动点通过迭代很容易作出，而且是唯一的。那么我们能不能将这个结果推广到更一般的空间中去呢？这便是下一节的任务。

2.距离空间上的压缩映射不动点定理

本世纪初年，人们发现，两实数之间的距离（即两数之差的绝对值）可以推广到很一般的集合上去。最简单的例子是$C[a,b]$——$[a,b]$上连续函数全体。我们可以在$C[a,b]$上定义一个距离$d(f,g)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$，它能满足如下的距离的抽象定义：

距离公理：设R是一个集合，若对任何一对元素x和y，都有一实数$\rho(x,y)$与之对应，满足

1° （非负性）$(x,y)\geqslant 0$

2° （唯一性）$\rho(x,y)=0$的充要条件是$x=y$

3° （对称性）$\rho(x,y)=\rho(y,x)$

4° （三角不等式）$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ （对任何$z\in$ R）

则称$\rho(x,y)$是x与y之间的距离，R以ρ成为距

离空间，（也称度量空间）。

读者不难验证，两实数之间的距离，$|x-y|$，两连续函数之间的距离，都满足上述距离公理。这一想法把人们的视野扩大了，不动点定理除了研究有限维的欧氏空间上的连续自映射之外，还可以研究函数空间上的不动点。而这是十分诱人的前景。1922年波兰数学家巴拿赫(Banach)证明了：

定理4·1 （压缩映射原理）在完备的距离空间R中的压缩映象A必有唯一的不动点。

它的证明和第1节中提到的数学分析习题的证明完全类似。第一也是用迭代法，那里我们要求f是自映射，现在A是R到R中的映象，当然是自映象。因此$x_{n+1}=A(x_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$是同样可以作的。

第二，我们同样可以估计

$$\rho(x_{n+p},x_n)\leqslant\rho(x_{n+p},\ x_{n+p-1})+\rho(x_{n+p-1},\ x_{n+p-2})+\cdots+\rho(x_1,x_0)$$

这里我们用$\rho(x,y)$代替了绝对值$|x-y|$，且利用了ρ的性质，特别是三角不等式。

第三，运用A的压缩性质

$$\rho(Ax,Ay)\leqslant\alpha\rho(x,y),0\leqslant\alpha<1$$

可以算出 $$\rho(x_{n+p},x_n)<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)$$

由此可知，若将柯西收敛准则中的绝对值换成R中的距离ρ，我们就可以说$\{x_n\}$满足R上的柯西收敛准则条件，即$\{x_n\}$是R中的柯西列。

第四，在实数系中，任何柯西列都收敛于某个x^*，于是距离空间也分出一类，称为完备的距离空间，它的特征是，其中的每个柯西列都收敛。这样我们又通过了一关：x_n必收敛于R中某点x^*.（完备性在定理中作为假设）

第五，我们在距离空间中也可引入相应的连续映射的概念：若在$x_0\in R$处，对任何$x_n\to x_0$，均有$Ax_n\to Ax_0$，则说A是连续的，而$x_n\to x_0$定义为实数列$\rho(x_n, x_0)\to 0$。这样A的压缩性：$\rho(Ax_n, Ax_0)\leqslant a\rho(x_n, x_0)$，立即可导出$A$的连续性。于是，由$x_n\to x^*$可知$Ax_n\to Ax^*$.再由

$$x_{n+1}=Ax_n$$

立知$x^*=Ax^*$，x^*即为所求的不动点。

唯一性的证明也是类似的。

压缩映象定理的证明，是数学抽象方法的典型例子。只要把绝对值换成距离，微积分的极限理论就能毫不费力地搬到一般的距离空间上来。上述的证明，我们是对比实数情形叙述的，读者可以用简短的篇幅写完它的严格证明。

现在我们给出巴拿赫定理的一个应用

定理4.2 设$f(s)$为$a\leqslant s\leqslant b$上的连续函数，$K(s,t)$为正方形$a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，且有常数M，使得

$$\int_a^b |K(s,t)|dt\leqslant M<\infty \quad (a\leqslant s\leqslant b)$$

那么当 $|\lambda|<\frac{1}{M}$时，积分方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

必有唯一的连续函数解。

证明 将全体$[a,b]$上的连续函数记为集合$C[a,b]$，其中定义距离为

$$\rho(f,g)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$$

此时$C[a,b]$构成距离空间，记映射K为

$$(K\varphi)(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

那么K是将$C[a,b]$映到$C[a,b]$ 中的压缩映射。事实上

$$\rho(K\varphi,K\psi)=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|K\varphi-K\psi\right|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}|\lambda|$$

$$\left|\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt-\int_a^b K(s,t)\psi(t)dt\right|$$

$$\leqslant|\lambda|\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left(\int_a^b|K(s,t)|\cdot|\varphi(t)-\psi(t)|dt\right)$$

$$\leqslant |\lambda| \cdot \left(\max_{a\leqslant t\leqslant b} |\varphi(t)-\psi(t)|\right) \cdot$$

$$\int_a^b |K(s,t)|\, dt$$

$$\leqslant |\lambda| \cdot M \cdot \rho(\varphi,\psi) = a\rho(\varphi,\psi)$$

此处$0\leqslant |\lambda| \cdot M<1$，因此$K$是压缩映射，由巴拿赫不动点定理（定理4.1）可知$K$必有唯一不动点$\varphi_0$，使$K\varphi_0=\varphi_0$，这就是说$\varphi_0$满足方程

$$\varphi_0(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi_0(t)dt$$

类似的应用的例子很多，可参看〔10〕.

3．巴拿赫不动点定理的推广

巴拿赫不动点定理中的压缩因子a要求严格小于1，许多定理试图改进这一结果，将条件放宽．为此我们先证明以下定理：

定理4.3 设(X,d)是完备距离空间，F是$X\to X$的映射，不必连续，但满足以下条件（*）：对任意$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$使得当$d(x,Fx)<\delta$时，$F[B(x,\varepsilon)]\subset B(x,\varepsilon)$，这里$B(x,\varepsilon)$表示以$x$为中心以$\varepsilon$为半径的实心球．那么，当对某$u\in X$有$d(F^n u,F^{n-1}u)\to 0$时，序列$\{F^n u\}$收敛于$F$的不

动点。

证明 记u的n次迭代$F^n u$为u_n。先证$\{u_n\}$是柯西列。给定$\varepsilon>0$，取N充分大，使当$n\geqslant N$时，$d(u_n,u_{n+1})<\delta(\varepsilon)$，因$d(u_N,Fu_N)<\delta$，按条件(*)，成立$F[B(u_N,\varepsilon)]\subset B(u_N,\varepsilon)$，因此$Fu_N=u_{N+1}\in B(u_N,\varepsilon)$。用数学归纳法可证对一切$k\geqslant 0$，$F^k u_N=u_{N+k}\in B(u_N,\varepsilon)$，即$d(u_N,u_{N+k})<\varepsilon$对$k\geqslant 0$都成立，这表明$\{u_n\}$是柯西列。

由于X是完备的，存在u^*，使$u_n\to u^*$，可证u^*是F的不动点。如若不然，则$d(u^*,Fu^*)=a>0$，我们取$u_n\in B\left(u^*,\dfrac{a}{3}\right)$，使得$d(u_n,u_{n+1})\leqslant\dfrac{a}{3}\cdot\delta$，仍由条件(*)知将有$F\left(B\left(u_n,\dfrac{a}{3}\right)\right)\subset B\left(u_n,\dfrac{a}{3}\right)$，故$Fu^*\in B\left(u_n,\dfrac{a}{3}\right)$。另一方面，由

$$d(Fu^*,u_n)\geqslant d(Fu^*,u^*)-d(u_n,u^*)\geqslant\frac{2}{3}a$$

可知$Fu^*\notin B\left(u_n,\dfrac{a}{3}\right)$。这个矛盾说明$d(u^*,Fu^*)=0$，此即$u^*=F(u^*)$。□

定理4.4 设(X,d)是完备距离空间，且

$$d(Fx,Fy)\leqslant\varphi(d(x,y))$$

其中φ: $R^+\to R^+$是单调不减的实函数（不必连续），且对任何固定的$t>0$，使得n次复合之值

$\varphi^n(t)\to 0$，那么，F有唯一的不动点。

证明 首先指出，对每个$t>0$，$\varphi(t)<t$。如若不然，即存在$t>0, t\leqslant\varphi(t)$。由$\varphi$单调不减性可知$\varphi(t)\leqslant\varphi(\varphi(t))$，重复使用$\varphi$的单调不减性，可知$t\leqslant\varphi^n(t)$，$n\geqslant 0$，这和$\varphi^n(t)\to 0$矛盾。故$\varphi(t)<t$成立。

根据假设$d(F^n x, F^{n+1}x)\leqslant\varphi^n(d(x,Fx))$，故对每一$x\in X$，由$\varphi^n(d(x,Fx))\to 0$，知$d(F^n x, F^{n+1}x)\to 0$。今令$\varepsilon>0$，取$\delta(\varepsilon)=\varepsilon-\varphi(\varepsilon)$，若$d(x, Fx)<\delta(\varepsilon)$，则对任何$z\in B(x,\varepsilon)$，有

$d(Fz,x)\leqslant d(Fz,Fx)+d(Fx,x)\leqslant\varphi[d(z,x)]+\delta<\varphi(\varepsilon)+\varepsilon-\varphi(\varepsilon)=\varepsilon$，即$Fz\in B(x,\varepsilon)$。由定理4.3知$F$有不动点。唯一性的证明是显然的。□

定理4.5 设(X,d)是完备的距离空间，若

$$d(Fx,Fy)\leqslant\alpha(x,y)d(x,y)$$

其中α：$X\times X\longrightarrow R^+$是二元函数，具有性质：对任何闭区间$[a,b]$，$a>0$，满足

$$\sup\{\alpha(x,y)\}\mid a\leqslant d(x,y)\leqslant b\}=\lambda(a,b)<1$$

则F有唯一的不动点u，且n次迭代值$F^n x\longrightarrow u$，对任何$x\in X$都成立。

证明 对任何$x\in X$，序列$\{d(F^n x, F^{n+1}x)\}$是不增的，故必收敛于某常数$a\geqslant 0$。今证$a=0$，对充

分大的n,

$$a\leqslant d(F^nx,F^{n+1}x)\leqslant a+1$$

对这种n，及$C=\lambda(a,a+1)$,用归纳法将可得

$$a\leqslant d(F^{n+k}x,F^{n+k+1}x)\leqslant C^kd(F^nx,F^{n+1}x)\leqslant C^k(a+1)$$

因$0<C<1$,上式仅当$a=0$时才能成立。

现在任给$\varepsilon>0$，令$\lambda=\lambda\left(\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon\right)$,取$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon(1-\lambda)\right\}$.设$d(x,Fx)<\delta$，$z\in B(x,\varepsilon)$.我们设法来证$F(B(x,\varepsilon))\subset B(x,\varepsilon)$.

注意到$d(Fz,x)\leqslant d(Fz,Fx)+d(Fx,x)$，我们考察两种情况

1° $d(z,x)<\frac{\varepsilon}{2}$. 此时有

$$d(Fz,x)\leqslant d(z,x)+d(Fx,x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

2° $\varepsilon/2\leqslant d(z,x)<\varepsilon$,于是

$$d(Fz,x)\leqslant\alpha(x,y)d(z,x)+d(Fx,x)<\lambda\varepsilon+(1-\lambda)\varepsilon=\varepsilon$$

因此，$F[B(x,\varepsilon)]\subset B(x,\varepsilon)$，由定理4.3，断言$F$有唯一的不动点，其余的证明是容易的。□

巴拿赫的压缩映射不动点定理，国内外都有

很多人进行推广，结果极为繁多。1977年，罗得斯发表《压缩映射各种定义之比较》一文（刊于Trans. Amer. Math. Soc. Vol 1, 226, No. 501），将距离空间(X,d)上压缩映射分成80类，并讨论各类压缩映射是否存在不动点。我国张石生先生也在这方面有系统的评述，见[11]。此类研究目前还在继续，有时可能失于繁琐，但作为一种训练，还是有其价值的。近几年来，概率度量空间上的压缩映象不动点问题进展较快，似乎可以期待有重要应用，读者若有兴趣，可参看[12]。

4. 希尔伯特空间上的非扩张映射

本书的前三部分，考察的是欧氏空间，前几节考虑的则是一般的距离空间。现在我们考察介于这二者之间的一些空间，主要是线性赋范空间和线性内积空间，这二者都是距离空间，它们的完备化就是人们熟知的巴拿赫空间和希尔伯特空间。为了读者方便，我们在此作一简单介绍。

大家知道，n 维欧氏空间R^n是一种实线性空间，即向量空间。其中元素允许相加和乘以实数。

R^n中的向量x可以写成基向量$e_1, e_2, \cdots, e_n$的线性组合 $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是x的坐标，x具有长度 $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$，而且任何两个向量$x, y$之间可以作内积$(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. R^n中两元素的距离$\rho(x, y)$可写成$\|x-y\|=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$. R^n关于这个距离是完备的.

将R^n中的这些特性作一般化的推广就有如下的概念：

1）一般的实线性空间（实向量空间）V。这就是说V中向量可以相加，可以乘以实数，满足交换律、分配律等一些性质（详见高等代数教科书）。若B是V的子集，而V中任何元素都可表示为B中有限个元素的线性组合 $x=\sum_{i=1}^{n} x_i b_i$，$b_i \in B$，n是随x可以不同的自然数，那么B称为V的基集，注意这里B不必是有限集，可以是无限集，它的基数（势）称为V的Hamel维数。

Hamel维数为无穷的线性空间就是无限维线性空间，例如$[a,b]$上多项式全体所构成的空间P形成无限维线性空间．任两多项式可以相加，可以数乘，其基集是$\{1,t,t^2,\cdots t^n,\cdots\}$．它的基数是可数的．

2）线性赋范空间X．如果X是一线性空间，其中每一向量x可定义一个范数$\|x\|$（相当于向量的长度），即能满足1° $x=0$当且仅当$\|x\|=0$． 2° $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$． 3° $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$．那么$X$构成一个线性赋范空间．

$[a,b]$上多项式全体所成空间P是线性赋范空间，只要规定$\|p(x)\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|p(x)|$．容易验证它满足上述三条件．

注意，线性赋范空间一定是距离空间，这只要定义x,y间距离为$\rho(x,y)=\|x-y\|$．由范数的三条件很快可推出距离公理．所以线性赋范空间从代数上看它是线性空间，从拓扑上看它是距离空间，而且加法和数乘对这个距离来说都是连续的（指$x_n\to x$，$y_n\to y,\lambda_n\to\lambda$则$x_n+y_n\longrightarrow x+y$，$\lambda x_n\longrightarrow\lambda x$，$\lambda_n x\longrightarrow\lambda x$）线性赋范空间的球邻域可用范数表示为$B(x_0,\varepsilon)=\{x\mid\|x-x_0\|<\varepsilon\}$．

线性赋范空间的完备化称为巴拿赫空间．

$[a,b]$ 上多项式全体构成的空间是不完备的，它的完备化是$[a,b]$ 上连续函数全体构成的空间 $C[a,b]$，这是因为任何连续函数$f(x)$总可用多项式$P_n(x)$一致逼近，即按最大值范数收敛：

$$\| f(x)-P_n(x) \| = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)-P_n(x)| \longrightarrow 0$$

3）希尔伯特空间。

线性赋范空间的特例是线性内积空间E．高等代数上定义过向量的内积，它是指对任何的$x,y\in E$对应一个实数，记为(x,y)，满足1° $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ 2° $(\lambda x,y)=(x,\lambda y)=\lambda(x,y)$，以及3° $(x,y)=(y,x)$。

有了内积可以定义范数 $\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}$．但反过来不一定．凡满足下列平行四边形法则的范数才能定义内积：

$$\| x+y \|^2+\| x-y \|^2=2(\| x \|^2+\| y \|^2)$$

R^n中定义范数为 $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，当然满足这一平行四边形公式，但是线性赋范空间$P$的范数就不能满足此公式。例如在 $[0,1]$ 取$p_1(x)=x$，$p_2(x)=(1-x)$．在 $[0,1]$ $p_1(x),p_2(x)$ 的最

大值都是1，$p_1+p_2=1$ 和 $p_1-p_2=1-2x$ 的最大值也是1，于是

$$\|p_1+p_2\|^2+\|p_1-p_2\|^2=1^2+1^2=2$$

但$2(\|p_1\|^2+\|p_2\|^2)=2(1^2+1^2)=4$. 故平行四边形法则不成立。

线性内积空间完备化以后称为希尔伯特空间。R^n是最简单的希尔伯特空间，其它的希伯尔特空间例子还有

$$l^2=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\Big|\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty\right\}$$

按照勒贝格意义下的积分，可证

$$L^2=\left\{f(x)\ \Big|\int_a^b(f(x))^2dx<\infty\right\}$$

也是希尔伯特空间。

综上所述，我们现在观察的空间将有两种结构：代数结构（线性空间）和拓扑结构(距离)，内积和范数概念兼有这两种结构，它们可以导出距离，所谓完备化正是按所导出的距离进行的。即空间中按距离形成的柯西列必收敛。

前面说过，不动点定理成立有两方面条件，一是空间中的点集，二是考察的映射，现在空间已经大为扩张，从R^n扩到一般的距离空间和线性

赋范空间，那么为了使不动点定理成立，就要对映射作些限制，所以在距离空间时，我们要求压缩映射，现在如果观察希尔伯特空间（距离空间的特例），那么对映射的限制似可稍为放松，我们引进下列概念：

李卜希兹映射F：设在距离空间(R,d)上定义了映射F，若存在常数$M>0$，使$\rho(Fx,Fy)\leqslant M\rho(x,y)$则称$F$是李卜希兹映射，使上述式子成立的最小常数称为李卜希兹常数，当$M<1$时，F即为压缩映射，如$M=1$，则称为非扩张映射。

显然，李卜希兹映射一定是连续映射。

5. 非扩张映射的不动点定理

这节我们在希尔伯特空间H上考察。H中子集F称为闭的，是指按由内积导出的范数、再由范数导出的距离ρ是闭集。（意即若$x_n\in F$，$\rho(x_n,x_0)\longrightarrow 0$，则$x_0\in F$）。$H$中子集$M$称为有界的，是指存在一个以原点$O$为中心，半径为$\alpha$的球$B(O,\alpha)$，使$M\subset B(O,\alpha)$，$B(O,\alpha)$可用范数描述为$\{x|\ \|x\|\leqslant\alpha\}$。因此有界集$M$是指存在常整$\alpha$，使得当$x\in M$时都有$\|x\|\leqslant\alpha$。$H$中的集合$E$称

为是凸集，是指E中任何两点的连线均在E中，即若$x,y\in E$,则对任何$0\leqslant a\leqslant 1$，均有$ax+(1-a)y\in E$。

显然，R^n中以O为中心的单位球是闭的、有界的凸集. 所以希尔伯特空间中的闭、有界、凸集是R^n中单位球的推广. 我们将证明布劳威尔不动点定理的下列推广：

定理4.6 若C是希尔伯特空间中的闭、有界、凸集，那么C上的非扩张自映射至少有一个不动点。

为了证明定理4.6，先来作一些准备工作。

引理1 设u,v是希尔伯特空间H中两个元素，如果存在$x\in H$，使得$\|x-u\|\leqslant R$，$\|x-v\|\leqslant R$且$\|x-(u+v)/2\|>r$，则$\|u-v\|\leqslant 2\sqrt{R^2-r^2}$。

证明 由平行四边形法则

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2&=\|(x-v)-(x-u)\|^2=2\|x-v\|^2+2\|x-u\|^2-\|x-v+x-u\|^2\\&=2\|x-v\|^2+2\|x-u\|^2-4\left\|x-\frac{u+v}{2}\right\|^2\\&\leqslant 4R^2-4r^2=4(R^2-r^2)\end{aligned}$$

两边开方即得结论。□

引理2 F是有界集C上的非扩张自映射。若x，y及$a=\frac{x+y}{2}$均在C内，且$\|x-F(x)\|\leqslant\varepsilon$，$\|y-F(y)\|\leqslant\varepsilon$,则

$$\|a-F(a)\|\leqslant 2\sqrt{2\delta(C)}\cdot\sqrt{\varepsilon}$$

这里$\delta(C)=\max\limits_{x,y\in C}\|x-y\|$,称为C的直径。

证明 因为

$$\|x-y\|\leqslant\left\|x-\frac{a+F(a)}{2}\right\|+\left\|y-\frac{a+F(a)}{2}\right\|$$

故右端两项必有一项不小于左端的一半。不妨认为是第一项，即$\left\|x-\frac{a+F(a)}{2}\right\|\geqslant\frac{1}{2}\|x-y\|$。

但 $\|x-a\|=\frac{1}{2}\|x-y\|$ 且

$\|x-F(a)\|\leqslant\|x-F(x)\|+\|F(x)-F(a)\|\leqslant\varepsilon+\|x-a\|=\varepsilon+\frac{1}{2}\|x-y\|$，

由引理1可知

$$\|a-F(a)\|\leqslant 2\left[\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\|x-y\|\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right.\right.$$

$$\|x-y\|\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon+\|x-y\|}$$

因为ε和$x-y$都不超过$\delta(c)$，定理的结论随即可得。□

现在我们来证明定理4.6. 它的想法是很自然的。首先，非扩张映射F可用压缩映射$F_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)F$来近似，$F_n$有不动点$x_n$。其次，$x_n$当然不必是$F$的不动点，但$x_n-F(x_n)$距离不超过$\dfrac{1}{n}\delta(C)$。于是考察$Q_n=\{x\in C\mid\|x-F(x)\|\leqslant\dfrac{1}{n}\delta(C)\}$.然后设法将$Q_n$改造成一个直径趋于0的闭集套$A_n$，由于完备距离空间中这种闭集套必有一公共点，定理遂最后得证。现详述如下：

第一步：不失一般性，设$O\in C$，对任何自然数$n>2$，作$F_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)F$，此时$F_n$是$C$到$C$的压缩映射，必有不动点$x_n$：$F_n(x_n)=x_n$。但

$$\|x_n-F(x_n)\|=\|F_n(x_n)-F(x_n)\|$$

$$=\frac{1}{n}\|F(x_n)\|\leqslant\frac{\delta(C)}{n}$$

第二步：考察 $Q_n=\left\{x\in C \mid \|x-F(x)\| \leqslant \frac{1}{n}\delta(C)\right\}$，今后我们把这种点称为$\frac{1}{n}\delta(C)$不动点（一般地对$\varepsilon>0$，有$\|x-F(x)\|<\varepsilon$的$x$称为$\varepsilon$不动点），显然$Q_n$是递缩的非空闭集套：$Q_1\supset Q_2\supset\cdots$。记$d_n=\inf\{\|x\| \mid x\in Q_n\}$（$Q_n$各点与原点的最小距离）。则$d_n$是单调不减数列，由于$Q_n$是$C$的子集，$d_n$之值不超过$\delta(C)$，所以$d_n\to d$。

第三步，构造直径趋于0的闭集套A_n：

$$A_n=Q_{8n^2}\cap\overline{B\left(O,d+\frac{1}{n}\right)}$$

显然，A_n仍是非空递缩闭集套，我们来计算$\delta(A_n)$。

首先，若$x,y\in Q_{8n^2}$，则$a=\frac{x+y}{2}\in Q_n$，这可由引理2看出：

$$\|a-F(a)\|\leqslant 2\sqrt{2\delta(C)}\sqrt{\frac{\delta(C)}{8n^2}}=\frac{\delta(C)}{n}$$

其次，若x，$y\in\overline{B\left(O,d+\frac{1}{n}\right)}$，则$\|O-x\|$

$\leqslant d+\frac{1}{n}$，$\|O-y\|\leqslant d+\frac{1}{n}$，因而 $\left\|O-\frac{x+y}{2}\right\|\geqslant d_n$。再用引理1知

$$\|x-y\|\leqslant 2\sqrt{\left(d+\frac{1}{n}\right)^2-d_n^2}$$

$$=2\sqrt{2dn^{-1}+n^{-2}+d^2-d_n^2}$$

当$n\to\infty$时，右端之值趋于0。故$\delta(A_n)\to 0$

由拓扑空间中的康托定理，完备距离空间中直径趋于0的递缩闭集套必有唯一的一点x_0属于所有套中的闭集：$x_0\in\bigcap_n A_n$，因而$x_0\in\bigcap_n Q_{8n^2}$，亦即

$$\|x_0-F(x_0)\|\leqslant\delta(C)\cdot\frac{1}{8n^2},\quad \text{对所有}n\text{都}$$

成立

故 $\|x_0-F(x_0)\|=0$，x_0即为F的不动点。□

在希尔伯特空间上，我们还可以把问题分析得更细致些。如果F不是自映射，则有如下结果

定理4.7 设H是希尔伯特空间，C是闭球$\{x\in H|\ \|x\|\leqslant c\}$，则由$C$到$H$内的任何非扩张映射必具以下两性质之一：（1）$F$有不动点（2）在球面$\partial C$上存在一点$x$，使$x=\lambda F(x)$，$0<$

$\lambda<1$.

证明　第一步，构造映射$r: H\longrightarrow C$如下：

$$r(x)=\begin{cases} x & \|x\|<c \\ c\dfrac{x}{\|x\|} & \|x\|\geqslant c \end{cases}$$

这是非扩张映射。事实上，若$u,v\neq 0$,则

$$(u-r(u),\ r(v)-r(u))\leqslant 0$$

当$\|u\|\leqslant c$时$r(u)=u$,显然对。若$\|u\|>c$,则

$$(u-r(u),\ r(v)-r(u))$$

$$=\begin{cases}\left(1-\dfrac{c}{\|u\|}\right)[(u,v)-c\|u\|], & \|v\|\leqslant c \\ \left(1-\dfrac{c}{\|u\|}\right)\left[c\dfrac{(u,v)}{\|v\|}-c\|u\|\right], & \|v\|\geqslant c\end{cases}$$

因$|(u,v)|\leqslant\|u\|\|v\|$,上式$\leqslant 0$立知。

现在证r是非扩张的。记$a=x-r(x)+r(y)-y$,

$$\|x-y\|^2=\|r(x)-r(y)+x-r(x)+r(y)-y\|=\|r(x)-r(y)+a\|$$
$$=\|r(x)-r(y)\|^2+\|a\|^2+2(a,r(x)-r(y))$$

但$(a,r(x)-r(y))=-(x-r(x),\ r(y)-r(x))-(y-r(y),\ r(x)-r(y))\geqslant 0$，这就表明$\|x-y\|^2\geqslant\|r(x)-r(y)\|^2$。因而$r$是非扩张的。

第二步，作F和r的复合映射$r\circ F$，它是C到C的非扩张自映射，由定理4.6，必有不动点x：$rF(x)=x$。若$F(x)\in C$，则$x=rF(x)=F(x)$，x是F的不动点。若$F(x)\notin C$，则$x=rF(x)=c\dfrac{F(x)}{\|F(x)\|}$，故$x\in\partial C$，取$\lambda=\dfrac{c}{\|F(x)\|}<1$，这就完成了证明。□

下面用定理4.7给出几个推论。

定理4.8 设C是H中的球，F是C到H的非扩张映射。若球面∂C上每点x满足下列条件之一，则F必有不动点：

1° $\|F(x)\|\leqslant\|x\|$

2° $\|F(x)\|\leqslant\|x-F(x)\|$

3° $\|F(x)\|^2\leqslant\|x\|^2+\|x-F(x)\|^2$

4° $(x,F(x))\leqslant\|x\|^2$

证明 这是定理4.7的简单推论。作为例子我们只证3°。如果此时F无不动点，那么存在$z\in\partial C$，且$z=\lambda F(z)$，$0<\lambda<1$；特别$F(z)\neq 0$。由3°的条件将有

$$\|F(z)\|^2\leqslant\|\lambda F(z)\|^2+\|\lambda F(z)-F(z)\|^2$$

这意味着$1\leqslant\lambda^2+(\lambda-1)^2$。另一方面，$\lambda^2+(1-\lambda)^2<\lambda+(1-\lambda)=1$（因$0<\lambda<1$），这个矛盾证明

了3°。

6. 线性赋范空间上的肖德尔不动点定理

这一节，我们将在线性赋范空间X上考虑问题。此时X中不必有内积，也不要求完备。X中子集C只要求凸，不要求闭。C上自映射F也不要求是压缩映射或非扩张映射，而改为要求F是紧映射。因而紧性将是本节讨论的主旋律。

我们先来介绍紧的概念。数学分析中有一定理：有界序列必有收敛子列。推而广之。任何无限的有界的实数集至少有一极限点。进一步，有界闭集包含自身的所有极限点，显示出这类点集自身联系紧密：极限点不会跑到集外去。有界闭集还有一重要性质，其上的任何开覆盖必可选出有限覆盖，（海因—波莱尔覆盖定理）。这些性质推广到距离空间上去，就得到

定义1 X中的子集C，如果其中的任何子列都有收敛子列（不必收敛于C中的点），称C为相对紧集。如果C上任何开覆盖必可选出有限覆盖，则称C为紧集。相对紧集的另一等价说法是

存在有限ε—网，即对任何$\varepsilon>0$,都存在C上有限个点$x_1,x_2,\cdots,x_N$,使C含于$\bigcup_{i=1}^{N}B(x_i,\varepsilon)$之中。

一个紧集的子集必是相对紧集。

紧集一定是有界集. 有限维欧氏空间中的有界闭集的充要条件是紧集。

现在我们再来定义映射的紧性

定义 2 设X和Y是距离空间，F是X到Y中的映射。

(i) 如果$F(X)$含于Y的某紧子集之中，称F为紧映射。（紧映射将X映为相对紧集）

(ii)如果X中的任何有界集B，其象$F(B)$含于Y的某紧子集中，则称F为完全连续。

(iii)若Y还是线性空间，当$F(X)$含于Y的有限维子空间中时，称F是有限维映射。

(Ⅳ)F将X中有界集映为Y中有界集，称F是有界映射。

有了上述定义，我们可以给出本节的主要定理

定理4.9 （肖德尔不动点定理）设C是赋范线性空间中的凸子集，F是C上的自映射而且是紧映射，则F至少有一个不动点。

我们的证明思路是用有限维映射去逼近紧映射，而有维映射实际上是在欧氏空间中考察的不动点定理，借用有限维欧氏空间上的布劳威尔不动点定理再回到紧映射，最终得出肖德尔不动点的存在。下面我们就具体来做。

第一步，构作肖德尔投影映射 p_ε。

我们把有限个点$c_1,c_2,\cdots,c_n$处的n个球$B(c_i,\varepsilon)$并起来，称为ε网，记之为$(N,\varepsilon)=\bigcup_{i=1}^{n}\{B(c_i,\varepsilon),i=1,2,\cdots,n\}$。这里$N$表示集$\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$。

在(N,ε)上可定义n个实函数$\mu_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$如下：对每一$x\in(N,\varepsilon)$，$\mu_i(x)=\max\{0,\varepsilon-\|x-c_i\|\}$。$\mu_i(x)$在$B(c_i,\varepsilon)$边界及以外为0，在$c_i$处为$\varepsilon$，是连续函数。

作p_ε为(N,ε)到Conv(N)的映射，对每个$x\in(N,\varepsilon)$定义

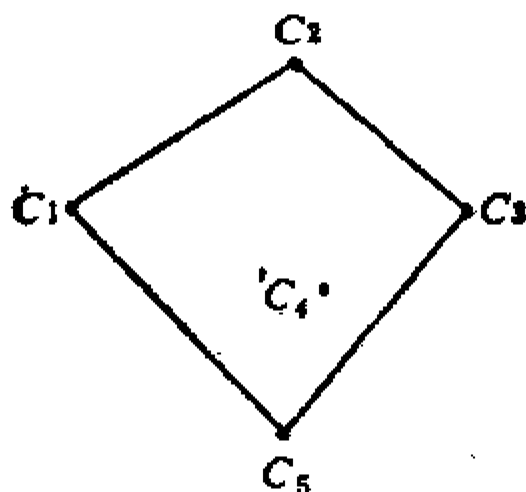
$$p_\varepsilon(x)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)}\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)c_i$$

这里Conv(N)是指N所张成的凸包：

$$\mathrm{Conv}(N)=\{y\,|\,y=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i,\ a_i\in N,\lambda_i\geqslant 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \ m \leqslant n\}$$

请读者注意，p_ε 位于由 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为顶点，$\lambda_i = \dfrac{\mu_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)}$ 为系数所成的凸包内（容易验证 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，$\lambda_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$）。所以 $p_\varepsilon(x)$ 确实是 (N,ε) 到 $\mathrm{Conv}(N)$ 的映射。



由 5 点 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 张成的凸包为四边形，c_4 在凸包内都不起作用，它可由其余四点表示出来。

图4.1

第二步，研究映射 p_ε 的性质。

引理　设 N 是凸集 C 中的有限个点 $c_1, c_2, \cdots c_n$ 所成之集，p_ε 是 (N,ε) 上的肖德尔投影映射，

则

（1）p_ε 是紧映射，将(N,ε)映入$\mathrm{Conv}(N)\subset$ **C**

（2）$\|x-p_\varepsilon(x)\|<\varepsilon$ 对 $x\in(N,\varepsilon)$

证明 （1）p_ε 的象集$p_\varepsilon((N,\varepsilon))$含在Conv(N)中，但Conv(N)是有限维空间（维数是 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 线性无关的个数）中的有界闭集（凸多面体显然是有界闭集），故是紧集，按紧映射的定义，p_ε 是紧映射。

（2）
$$\|x-p_\varepsilon(x)\|=\left\|x-\frac{1}{\sum_{i=1}^{s}\mu_i(x)}\cdot\sum_{i=1}^{s}\mu_i(x)c_i\right\|=\frac{1}{\sum_{i=1}^{s}\mu_i(x)}\cdot\left\|\sum_{i=1}^{s}\mu_i(x)(x-c_i)\right\|$$
$$\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{s}\mu_i(x)\|x-c_i\|}{\sum_{i=1}^{s}\mu_i(x)}<\varepsilon$$

引理指出，p_ε 是紧映射，且将(N,ε) 中 x 映

到距离不大于 ε 的 $p_\varepsilon(x)$处。

第三步。考察复合映射 $p_\varepsilon \circ F = F$ 的性质。

已知F是C到 C 的紧映射，即 $F(C)$是相对紧集，因而必含于某(N,ε)之中，对(N,ε) 再作用P_ε，将(N,ε)映到Conv(N) 内，但Conv$(N)\subset C$.故 $p_\varepsilon \circ F = F_\varepsilon$ 仍将C映到C中，即$F_\varepsilon(C)\subset C$是$C$上自映射。用上述引理，因 $F(x)\in(N,\varepsilon)$，知 $\| F(x) - p_\varepsilon(F(x)) \| = \| F(x) - F_\varepsilon(x) \| \leqslant \varepsilon$。

这表明$F(x)$可用有限维映射$F_\varepsilon(x)$逼近，其距离不超过 ε。

第四步。最后证明肖德尔不动点定理。

我们证明定理4.6时，已用过这样的结果：x^*是F的不动点的充要条件是对 $\varepsilon>0$，x_ε都是F的 ε 不动点。所谓 ε 不动点指 $\| x_\varepsilon - Fx_\varepsilon \| < \varepsilon$。现在仍用这一方法。

固定$\varepsilon>0$，由第三步可知存在 F_ε: $C \longrightarrow$ Conv$(N)\subset C$，使得 $\| F_\varepsilon(x) - F(x) \| < \varepsilon$。因为$F_\varepsilon$(Conv$(N)$) $\subset$ Conv(N)，而Conv(N) 是某有限维空间的凸多面体，同胚于单位球。于是应用有限维空间上的布劳威尔不动点定理，可知存在 $x_0\in$ Conv(N)使 $F_\varepsilon x_0 = x_0$。但是

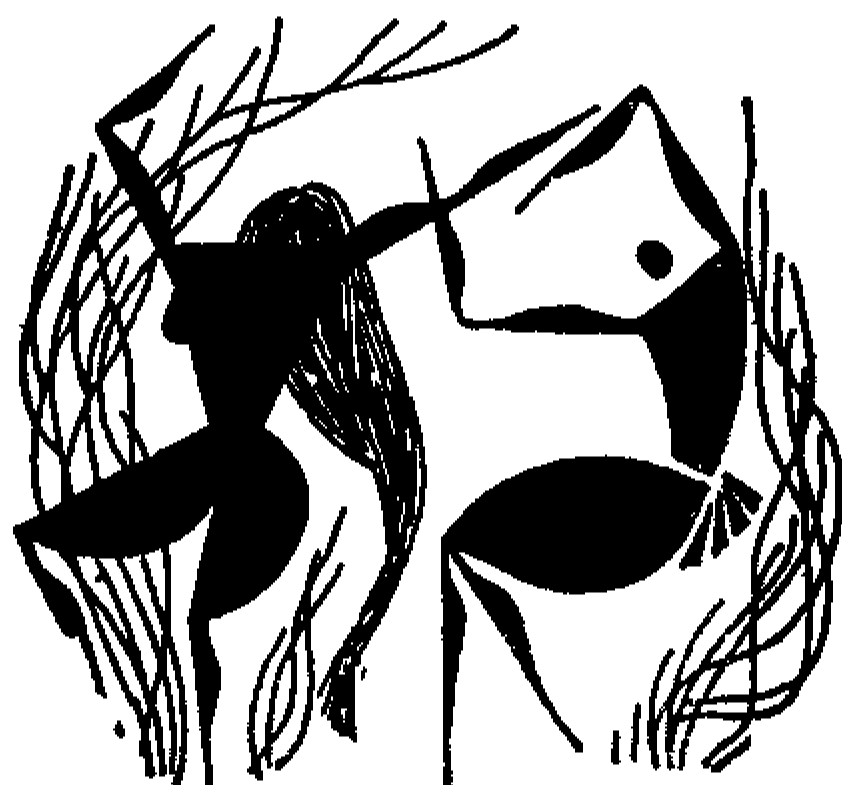
$$\| x_0 - Fx_0 \| = \| F_\varepsilon x_0 - Fx_0 \| < \varepsilon$$

对任何 ε 都成立，故只能$x_0 = Fx_0$，这就证明了定

理4.9。

肖德尔定理有许多重要的应用。70年代中期，苏联数学家罗蒙诺索夫证明，任何紧算子都有超不变子空间，轰动一时，其主要工具就是肖德尔不动点定理，详见[10]第五章。

五 莱夫希兹不动点定理和尼尔森数



1. 莱夫希兹不动点定理

在第四部分中讨论了某些特定的自映射，它们具有不动点，人们当然会期望，能有一个一般的判别准则来判别自映射是否具有不动点。然而这是一个相当复杂的问题，在这方面首先取得突破的是莱夫希兹，他考虑了一种特殊的拓扑空间——多面体，利用同调群得到一个用数量表示的充分条件，这就是莱夫希兹不动点定理。

第三部分中说过，多面体 $|K|$ 的连续自映射 f 可诱导同调群之间的一列同态 f_{*q}：$H_q(K)\longrightarrow H_q(K)$。然而对于一般的群之间的同态并不能导致数量表示，因此我们希望同调群能成为一种特殊的群——向量空间，因为向量空间之间的

同态可以用一个矩阵加以表示，如果矩阵的元素是数，则可有矩阵的行列式，矩阵的迹数等数量．为此我们回想在第三部分内引入链群、闭链群、边缘链群时，使用的系数群是整数群 **Z**，而在构作中实际上只涉及到**Z** 的交换群性质，因而可以想象用任意一个交换群G 代替**Z**时，同样可得到群$C_q(K;G)$、$Z_q(K;G)$、$B_q(K;G)$ 和$H_q(K;G)$ ．从代数知识可知，为要得到向量空间，交换群G 需是一个域，最简单的域是有理数域**Q**。用有理数域**Q**代替 **Z** 所得到的同调群$H_q(K;\mathbf{Q})$称为有理同调群，对 $C_q(K;\mathbf{Q})$ 、$Z_q(K;\mathbf{Q})$ 和$B_q(K;Q)$ 也分别有相应的名称，这些群现在都是向量空间．由于一个复形是由有限个（满足一定条件的）单形所组成，因而上述所得的四个向量空间都是有限维的．复形K的有理同调群的维数与K的佩蒂数（参见第三部分第 5 节）有如下关系：

定理5.1　向量空间$H_q(K;\mathbf{Q})$ 的维数等于K的 q维佩蒂数．

在阐述莱夫希兹不动点定理以前，我们先观察和分析球面S^2的两个自映射*．

* 本部分所说的映射均是指连续映射．

1° $f:S^2\longrightarrow S^2$，f 将 S^2的每个点绕由南极和北极所确定的直径旋转 $\pi/2$。

2° $g:S^2\longrightarrow S^2$，g 是在映射 f 作用后再作一次对径映射。

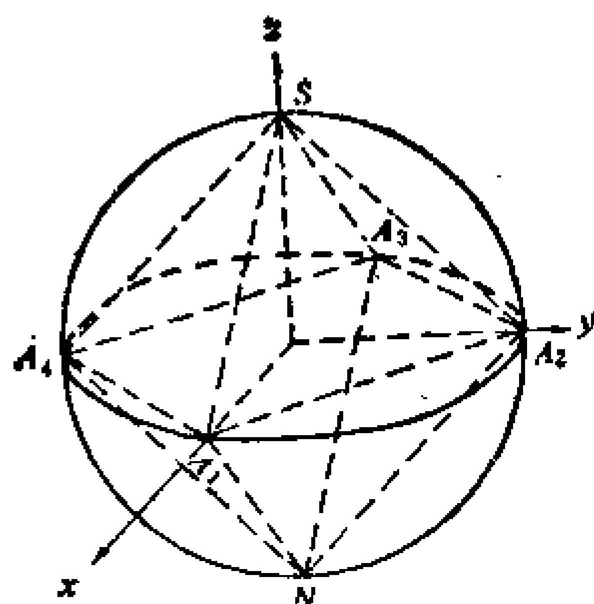


图5.1

显然映射 f 具有不动点南极和北极，而映射 g 没有不动点．现在取S^2的单纯剖分：令 $S(0,0,1)$、$N(0,0,-1)$、$A_1(1,0,0)$、$A_2(0,1,0)$、$A_3(-1,0,0)$、$A_4(0,-1,0)$，这样可得八面体的表面所构成的复形 K（如图5.1），再利用向径映射就可得 S^2的一个剖分．由映射 f 和 g可得相应的多面体 $|K|$ 的自映射，仍用原来的符号表示，即 $f,g:|K|\longrightarrow|K|$，

显然这两个映射都恰好是单纯映射（见第三部分第4节）.

考虑K的有理链群 $C_q(K;Q)$，$q=0,1,2$，它们是向量空间. $C_0(K;Q)$ 的基有6个元素所构成，最简单地可取为$\{N,S,A_1,A_2,A_3,A_4\}$，由f所 诱导的链群同态（线性变换）$f_0:C_0(K;Q)\longrightarrow C_0(K;Q)$在基上的作用为：

$$f_0(N)=N,\ f_0(S)=S,\ f_0(A_1)=A_2,$$

$$f_0(A_2)=A_3,\ f_0(A_3)=A_4,\ f_0(A_4)=A_1.$$

这样线性变换f_0的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这个矩阵的迹数，即矩阵的对角线元素之和，是$t_rf_0=2$（注意：线性变换的迹数与基的选取无关）.

向量空间 $C_1(K;Q)$ 的基有12个元素，可取12个1维定向单形所构成，如$\{NA_1,NA_2,NA_3,NA_4,SA_1,SA_2,SA_3,SA_4,A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_1\}$，线性变换 f_1 在基上的作用为

$f_1(NA_1)=NA_2$，$f_1(SA_1)=SA_2$，$f_1(A_1A_2)=A_2A_3$，等等。于是f_1的变换矩阵是

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0
\end{pmatrix}$$

它的对角线元素全是0，因而其迹数 $t_rf_1=0$。对$C_2(K;Q)$的基可取为$\{NA_1A_2, NA_2A_3, NA_3A_4, NA_4A_1, SA_1A_2, SA_2A_3, SA_3A_4, SA_4A_1\}$，它有8个元素。诱导映射$f_2:C_2(K;Q)\longrightarrow C_2(K;Q)$在基上的作用为$f_2(NA_1A_2)=NA_2A_3$、$f_2(SA_1A_2)=SA_2A_3$，等等。因此$f_2$矩阵的对角线元素全是0，从而迹数 $t_rf_2=0$。

映射 g也是单纯映射，它在顶点上的作用是$g(N)=S$，$g(S)=N$，$g(A_1)=A_4$，$g(A_2)=A_1$，$g(A_3)=A_2$，$g(A_4)=A_3$，将上面对f的诱

导映射 f_q 的讨论同样地应用到 g 所诱导的映射 g_q: $C_q(K;Q)\longrightarrow C_q(K;Q)$，容易看出 $g_q(q=0,1,2)$ 的矩阵的对角线上的元素都是0，因此迹数 $t_rg_q=0$，$q=0、1、2$。

这样我们就会想到，对一个单纯映射 $f:|K|\longrightarrow|K|$，能否利用 f 所诱导的有理链群 $C_q(K;Q)$ 上的线性变换 f_q 的迹数 t_rf_q来判别 f 是否具有不动点呢？对此存在一个显然的麻烦，虽然迹数 t_rf_q 与链群 $C_q(K;Q)$的基的选取无关，但链群 $C_q(K;Q)$ 本身不是由 $|K|$ 所唯一决定的。而是随复形 K 而定，即与 $|K|$ 的剖分有关。细心的读者也许就会想到，有理同调群 $H_q(K;Q)$ 是由 $|K|$ 所决定的（其道理类似于整同调群 $H_q(K)$ 由 $|K|$ 决定），那么能否用由单纯映射 f 诱导的有理同调群 $H_q(K;Q)$ 上的线性变换 f_{*q}的迹数来代替 t_rf_q呢？为此我们来考虑两个迹数 t_rf_q与 t_rf_{*q} 之间的关系。

容易看出有理链群 $C_q(K;Q)$ 作为向量空间，其维数等于复形 K 中 q维单形的个数，记为 α_q。为探求线性变换的迹数 t_rf_q与 t_rf_{*q} 之间的关系，我们希望C_q、Z_q、B_q的基之间有一个明显的关系，鉴于边缘链群B_q是闭链群 Z_q 的子群，Z_q 是链群 C_q的子群，故可从B_q的基着手，逐步

加以扩充的办法来取基，具体作法为：设K是 n 维复形，则没有$n+1$维复形，故 $B_n=0$，先取闭链群Z_n的一组基 $z_1^n, \cdots, z_{\beta_n}^n$，再补充 $c_1^n, \cdots, c_{\gamma_n}^n$使之构成链群 C_n的一组基；将边缘算子 ∂ 作用于链群 C_n的这组基上，就得到 $n-1$维边缘链群 B_{n-1} 的一组基 $\partial c_1^n, \cdots, \partial c_{\gamma_n}^n$，添加 $z_1^{n-1}, \cdots, z_{\beta_{n-1}}^{n-1}$，使它们构成闭链群 Z_{n-1} 的基，再添上 $c_1^{n-1}, \cdots, c_{\gamma_{n-1}}^{n-1}$，使整个构成链群 C_{n-1}的一组基；继续这样作下去，一般的步骤是用 $\partial c_1^{q+1}, \cdots, \partial c_{\gamma_{q+1}}^{q+1}$ 作为边缘链群B_q的基，补上 $c_1^q, \cdots, c_{\beta_q}^q$ 使之扩展成闭链群 Z_q 的基，再补上 $c_1^q, \cdots, c_{\gamma_q}^q$，使其又扩展成链群 C_q 的基，这样一步一步作下去，直至作到 $Z_0=C_0$ 的基$\partial c_1^1, \cdots, \partial c_{\gamma_1}^1, z_1^0, \cdots, z_{\beta_0}^0$ 为止。根据这样取基的方法可知，闭链群Z_q的维数减去边缘链群B_q的维数等于同调群 H_q 的维数，它恰好是 β_q。

利用上述选取的基，设ω是链群$C_q(K;Q)$的基$\{\partial c_1^{q+1}, \cdots, \partial c_{\gamma_{q+1}}^{q+1}, z_1^q, \cdots, z_{\beta_q}^q, c_1^q, \cdots, c_{\gamma_q}^q\}$中的任一元素，由于要考察$f_q$ 的迹数，故需关心的是 ω 经线性变换 $f_q: C_q \longrightarrow C_q$后，所得 $f_q(\omega)$写成基的线性组合时关于对ω的系数，记这系数为$\lambda(\omega)$，则 f_q 的迹数是

$$t_r f_q = \sum_{j=1}^{\gamma_{q+1}} \lambda(\partial c_j^{q+1}) + \sum_{j=1}^{\beta_q} \lambda(z_j^q) + \sum_{j=1}^{\gamma_q} \lambda(c_j^q)$$

由于 $[z_1^q], \cdots, [z_{\beta_q}^q]$ 构成 $H_q(K;Q)$ 的基，因此 $f_{*q}: H_q(K;Q) \longrightarrow H_q(K;Q)$ 的迹数为

$$t_r f_{*q} = \sum_{j=1}^{\beta_q} \lambda(z_j^q)$$

这样一般地 $t_r f_q \neq t_r f_{*q}$，也就是说我们不能简单地用 f_{*q} 的迹数来代替 f_q 的迹数。然而单纯映射所诱导的链群 $C_q \longrightarrow C_q$ 的映射 f_q 是一个链映射，即满足关系式 $\partial_{q+1} \circ f_{q+1} = f_q \circ \partial_{q+1}$，因而可得

$$\lambda(\partial c_j^{q+1}) = \lambda(c_j^{q+1}).$$

利用此式和上面关于 $t_r f_q$ 和 $t_r f_{*q}$ 的表达式就可得出下面的关系式

$$\sum_{q=0}^{n} (-1)^q t_r f_q = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \sum_{j=1}^{\beta_q} \lambda(z_j^q)$$

$$= \sum_{q=0}^{n} (-1)^q t_r f_{*q} \qquad (*)$$

上式右端的量被称为映射 f 的莱夫希兹数，记作 $L(f)$，即

$$L(f) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q t_r f_{*q}$$

注意：莱夫希兹数对多面体的任一连续自映

射 $f: |K| \longrightarrow |K|$ 都有定义，其中 f_{*q}是由 f诱导的同调群之间的映射。可以证明 $L(f)$ 是一个同伦不变量，也就是说，若 $f \simeq g: |K| \longrightarrow |K|$，则 $L(f)=L(g)$。关系式 (*) 称为霍甫迹数引理，它表明在链的水平或是在同调类的水平计算映射的莱夫希兹数$L(f)$是一致的。

现在回到本节开始时引入的球面S^2到自身的两个自映射 f和 g，其中 f 具有两个不动点，g 没有不动点。根据霍甫迹数引理以及对 f和 g诱导的链群间映射f_q和g_q 的迹数的计算，可知映射 f和g 分别有莱夫希兹数 $L(f)=2$和 $L(g)=0$。由此人们会想到能否利用映射的莱夫希兹数来判别这映射是否具有不动点呢？对此莱夫希兹首先证明了下述定理。

定理5.2 （莱夫希兹不动点定理）若映射 $f: |K| \longrightarrow |K|$ 的莱夫希兹数$L(f) \neq 0$，则 f必有不动点。

证明 我们只需证明与其等价的逆否命题：若 f 不具有不动点，则 $L(f)=0$。根据霍甫迹数引理，我们可在链的水平上计算$L(f)$。受本节初对映射 $g: S^2 \longrightarrow S^2$ 的讨论的启发，可知若能证得各维链映射的迹数都等于零，定理就能得证。

设 $f\colon |K| \longrightarrow |K|$ 没有不动点，也就是说对任意$x\in |K|$，都有$x\neq f(x)$，则$d(x,f(x))$是x的实值正函数，其中 $d(x,f(x))$ 表示x与$f(x)$之间的距离，由于$|K|$是有界闭集，因而此函数可取到下确界 $\delta(>0)$．不失一般性，可设复形K的所有单形的最大直径小于 $\delta/3$，否则可进行若干次重心重分。

取 $f\colon |K^m| \longrightarrow |K|$ 的一个单纯逼近 $\varphi\colon |K^m| \longrightarrow |K|$，令 $g_q\colon C_q(K;Q)\longrightarrow C_q(K;Q)$ 是重分链映射，则 f_{*q} 是复合同态。

$$H_q(K;Q)\xrightarrow{g_{*q}}H_q(K^m;Q)\xrightarrow{\varphi_{*q}}H_q(K;Q).$$

根据霍甫迹数引理，只需证明每个线性映射

$$\varphi_q\circ g_q\colon C_q(K;Q)\longrightarrow C(K;Q)$$

的迹数为0．

设σ是K的一个定向 q维单形，则 $g_q(\sigma)$ 是K^m的一个链，这链上的每个单形都包含在σ内。取链 $g_q(\sigma)$上的任一有向单形 τ，若$x\in\tau$，由于φ是 f的单纯逼近，因而 $\varphi(x)$与 $f(x)$在同一单形内，故有

$$d(\varphi(x),f(x))<\delta/3$$

因而必然有 $d(x,\varphi(x))>2\delta/3$。若 $y\in\sigma$，则$d(x,y)<\delta/3$，从而 $d(y,\varphi(x))>\delta/3$，这表明

$\varphi(x)$与 y 不在K的同一个单形内，因此 $\varphi(\tau)\neq\sigma$，这就表明任一单形σ，它在链 $\varphi_q\circ g_q(\sigma)$ 内的系数是零，即对任一$q(0\leqslant q\leqslant n)$ 有$t_r\varphi_q\circ g_q=0$，从而$L(f)=0$，定理证毕。

正如前面所说，莱夫希兹不动点定理是一个充分条件，很容易找到$L(f)=0$ 的映射 f，但它具有不动点。例如取三角形的边界复形 $K=\{a_0, a_1, a_2, (a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_0)\}$， 并取 $f: |K| \longrightarrow |K|$ 为恒等映射，f 显然是单纯映射，在给出K的单形的定向后，即可知 $t_rf_0=3$，$t_rf_1=3$，因而 $L(f)=(-1)^0\cdot 3+(-1)^1\cdot 3=0$，然而$|K|$的每一个点都是 f 的不动点。

2．莱夫希兹定理的推论和推广

上节引入的多面体自映射的莱夫希兹数有一个与欧拉示性数相关的几何解释，在第三部分第5节中说过，复形K的欧拉示性定义为

$$\chi(K)=\sum_{q=0}^{\dim K}(-1)^q a_q$$

其中 a_q 是复形K中 q 维单形的个数。若取恒等映射 $id: |K| \longrightarrow |K|$，则有 $t_r id_q=a_q$，因而得

出对恒等映射有 $L(id)=\sum_{q=0}^{\dim K}(-1)^q id_{*q}=$

$\sum_{q=0}^{\dim K}(-1)^q t_r id_q=\sum_{q=0}^{\dim K}(-1)^q a_q=\chi(K)$，也就是说，多面体 $|K|$ 的恒等映射 id 的莱夫希兹数等于复形 K 的欧拉示性数。根据这一几何意义，我们立即可得到莱夫希兹定理的如下推论。

推论1 若复形 K 的欧拉示性数 $\chi(K)\neq 0$，则与 $|K|$ 到自身的恒等映射同伦的任一映射 $f: |K| \longrightarrow |K|$ 必具有不动点。

证明 由于映射的莱夫希兹数是同伦不变的，据假设 $f\simeq id$，因而有 $L(f)=L(id)=\chi(K)\neq 0$，由莱夫希兹定理就得出映射 f 具有不动点。

根据这推论我们来讨论球面 S^2 的自映射。设 f 是 S^2 的一个自映射，且 f 将 S^2 的任一点都不映到它的对径点，则对每一点 $x\in S^2$ 和它的象点 $f(x)$，可以用唯一的一条大圆劣弧（记为 $\widehat{f(x)x}$）联结它们，若以 $l(x)$ 表示弧 $\widehat{f(x)x}$ 的长度，将每一 $f(x)$ 沿其大圆弧按 $(1-t)l(x)$ 向 x 移动，其中 $0\leqslant t\leqslant 1$，则这一移动过程正是描述了映射 f 到球面的恒等映射的同伦，即 $f\simeq id$。由于球面的欧拉示性数 $\chi(S^2)=2\neq 0$（球面 S^2 的欧拉示

性数等于四面体表面的欧拉示性数，后者是凸多面体的表面，故由欧拉定理可知其示性数为2)，从而由推论 1 可知 f必具有不动点，即我们得出了如下结果：若映射 $f:S^2\longrightarrow S^2$ 将S^2 的任一点的不映为其对径点，则f具有不动点。这一结果我们已在第二部分第 2 节中用向量场的方法予以证明，那里使用了“发球定理”。此结果也可写成下面的形式：对球面S^2的任一自映射 f，则或者 f 至少使S^2的某一点映成对径点，或者 f 至少使S^2 的某一点保持不动。由此可知，球面到自身的任一较小的变动都具有不动点。例如，将球面依次绕十条直径作旋转，每次的转动角都不超过10°，则此球面经过这连续十次转动后，至少有一个不动点，因为此时任一点都不可能变到它的对径点。

可以证明，上述结果对 n为偶数时的球面S^n同样成立，也就是说，若 n为偶数，f 是 S^n 到自身的任一自映射，它使S^n的每一点都不映为其对径点，则 f具有不动点。

从莱夫希兹不动点定理还可得到布劳威尔定理的另一证明。

推论 2 如果复形K的有理同调群与一点的同调群同构，也就是说 $H_p(K;Q)\cong\begin{cases}Q, p=0,\\ O, p\neq 0\end{cases}$

则 $|K|$ 具有不动点性质。特别当取 $|K|$ 同胚于闭球 B^n时，即为布劳威尔不动点定理。

证明 设 f是 $|K|$ 到自身的任一自映射，任取K的一个顶点a，由于 $H_0(K;Q)\cong Q$，故K是道路连通的，因而任意两个顶点都是同调的，即有 $f_{*0}([a])=[a]$，从而得到 $t_r f_{*0}=1$；又因为$H_p(K;Q)=0$，$p\neq 0$，所以 $t_r f_{*p}=0(p\neq 0)$，这样 f的莱夫希兹数 $L(f)=1\neq 0$，由定理5.2知 f 具有不动点。由于 f是 $|K|$ 的任一（连续）自映射，因而 $|K|$ 具有不动点性质。

当取 $|K|$ 同胚于闭球B^n时，我们可类似于对B^3那样证明 $H_0(B^n;Q)\cong Q$，$H_p(B^n;Q)=0(p\neq 0)$，由于同调群在同胚映射下是不变的，因此根据本推论前半部分的结论，可知 $|K|$，特别是B^n本身具有不动点性质，这就是布劳威尔不动点定理。

根据这一推论，我们还可以说明射影平面P^2具有不动点性质。在第三部分第5节中已经指出，P^2的整同调群为

$$H_0(P^2)\cong Z, H_1(p^2)\cong Z_2, H_q(p^2)=0(q>1)$$

这就是说，P^2的0维佩蒂数为1，其他维的佩蒂数都是0，于是根据定理5.1可知射影平面的有理同调群为

$$H_0(P^2;Q)\cong Q,\ H_q(P^2;Q)=0\ \ (q\neq 0)$$

这样P^2与一点有同构的有理同调群，根据推论2就可知射影平面P^2具有不动点性质。实际上可以证明这一结论对任意的偶数维射影空间都成立，也就是说：若n为偶数，则n维射影空间P^n具有不动点性质。

莱夫希兹不动点定理由莱夫希兹于1923年首先提出和证明的，但当时仅对一部分多面体证明定理是对的，后来在1929年由霍甫证明了此定理对所有的多面体都成立。1930年莱夫希兹又将此定理推广到比多面体更广的一类拓扑空间——紧致的绝对邻域收缩核，即得出了下述定理。

定理5.3 若X是紧致的绝对邻域收缩核，且映射$f:X\longrightarrow X$的莱夫希兹数$L(f)\neq 0$，则每个同伦于f的映射都具有不动点。

所谓邻域收缩核是这样定义的：设A是空间X的一个子集，若存在X的含A的开子集U和U到A上的保核收缩，则称A为X的邻域收缩核。若一个紧致的度量空间X满足下列条件，则称X为紧致的绝对邻域收缩核：若A是可分度量空间Y的子空间，且A同胚于X，则A是Y的邻域收缩核。

莱夫希兹曾预言莱夫希兹定理对紧致度量空

间成立，然而 K. Borsuk 在1935年找出了一个反例说明了这一预言并不成立。以后，莱夫希兹定理又有一些推广，例如可见 Leray 的〔19〕，Browder 的〔20〕，Knill 的〔21〕和Granas 的〔22〕等。

3. 不动点个数问题和尼尔森数

上面我们已经讨论了自映射的不动点存在问题，尽管问题没有完全解决，也就是说没有得到自映射存在不动点的充要条件，但必竟得到了一些充分条件。特别是本章所说的莱夫希兹不动点定理，它在理论上和实用上都是极有价值的。当然人们紧接着就会提出一个颇感兴趣的问题：若映射 $f:X\longrightarrow X$具有不动点，能否知道 f有几个不动点呢？求不动点的个数问题，对一些很简单的自映射可以通过讨论方程 $x=f(x)$，$x\in X$ 的解的个数来解决，如下面要说到的圆周S的整幂映射，但一般说来不动点的个数是难以确定的，因而通常研究同伦自映射的不动点个数的下界，在这方面我国数学家做了不少工作，取得了令人注目的成果。

我们首先观察圆周S上的一种特殊自映射——整幂映射。圆周可表示成

$$S=\{z\,|\,|z|=1\}\text{ 或 }S=\{e^{2\pi si}\,|\,s\in I\}.$$

其中 z是复数，s 是实数， $i=\sqrt{-1}$，$I=[0,1]$。S的最简单但具有典型意义的自映射是整幂映射

$$f_n:S\longrightarrow S,\ z\longrightarrow z^n,\ z\in S\text{ 或 }e^{2\pi si}\longrightarrow e^{2\pi nsi},\ s\in I$$

其中n 是给定的整数。显然f_0是常值映射，即将S的所有点都映为复平面上的点1；f_1是恒等映射。整幂映射 f_n 有非常直观的几何形象，若取逆时针方向为S的正向，则当 $n>0$ 时，映射f_n是将S上的点均匀地沿S的正向绕n圈，就象将一根绕在S上的橡皮筋拉长后的均匀地沿原来的方向绕n圈；当 $n<0$时，则沿S的反向均匀地绕 $|n|$ 圈。

通过简单的计算可以得出：整幂映射f_n 的莱夫希兹数 $L(f_n)=1-n$。

我们给出当 $n\geqslant3$ 时上述结论的一个直观计算。先将复平面上圆周S的圆弧n等分，分点按逆时针方向依次记为 $a_0=1,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n=a_0$，如将每段圆弧看成直线段，则$S$被剖分为复形 $S=\{a_0,\cdots,a_{n-1},a_0a_1,a_1a_2,\cdots,a_{n-1}a_0\}$。再将每段

弧 a_ia_{i+1}分成 n 等分，分点依次记为 $a_{i0}=a_i$，a_{i1}，…，a_{in-1}，$a_{in}=a_{i+1}$，这样可得复形 $S'=\{a_{00}, \cdots, a_{0n-1}, a_{10}, \cdots, a_{1n-1}, \cdots, a_{n-1n-1}, a_{00}a_{01}, \cdots, a_{n-1n-1}\ a_{00}\}$（如图5.2），则复形$S$与$S'$的多面体是相同的，即 $|S|=|S'|$。作S的链群到S'的链群的链映射 g：

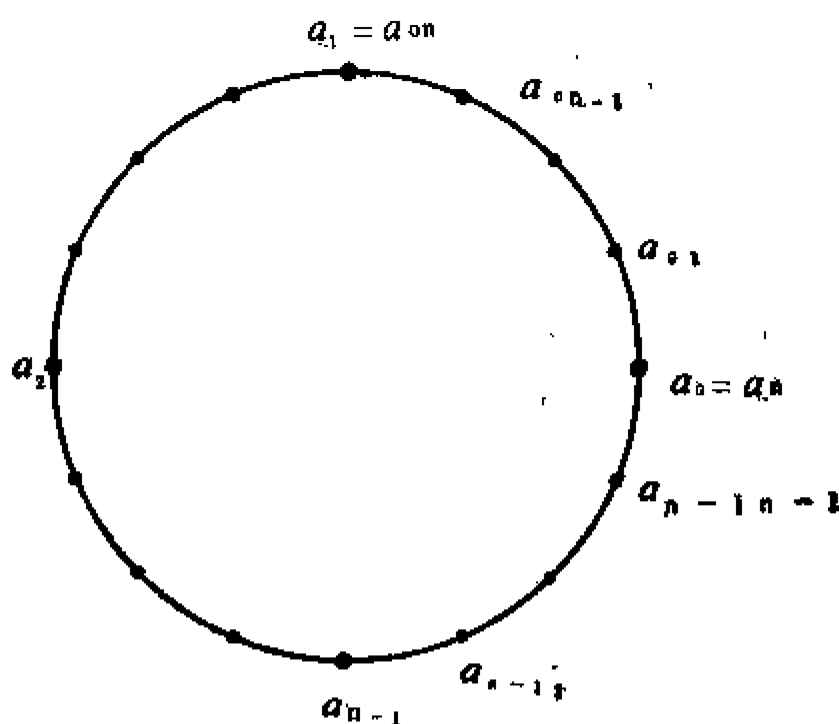


图5.2

$$g_0(a_i)=a_i,\ i=0,\ \cdots,\ n-1,$$

$$g_1(a_ia_{i+1})=a_{i0}a_{i1}+a_{i1}a_{i2}+\cdots+a_{in-1}a_{i+1},$$
$$i=0,\ \cdots,\ n-1.$$

再作 f_n: $|S'|\longrightarrow|S|$ 的单纯迫近 φ: $|S'|\longrightarrow$

$|S|$ 如下：

$\varphi_0(a_{ij})=a_j,\ \ i,j=0,\ \cdots,\ n-1$

$\varphi_1(a_{ij}a_{ij+1})=a_ja_{j+1},\ \ i,\ j=0,\ \ \cdots,\ \ n-1$

于是由映射 f_n所诱导的链群之间的映射 $(f_n)_k=\varphi_k\circ g_k$，$k=0,1$。

这样我们就可计算迹数 $t_r(\varphi_k\circ g_k)$。对0维单形a_i，$g_0(a_i)=a_i$，$\varphi_0(a_i)=\varphi_0(a_{i0})=a_0$，因此只有$a_0$经 $\varphi_0\circ g_0$ 后才变到自身，故有 $t_r(\varphi_0\circ g_0)=1$。对每个1维单形 $a_ia_{i+1}\in S$，$\varphi_1\circ g_1(a_ia_{i+1})=\varphi_1(a_{i0}a_{i1}+a_{i1}a_{i2}+\cdots+a_{in-1}a_{in})=a_0a_1+a_1a_2+\cdots+a_{n-1}a_0$，因而 $t_r(\varphi_1\circ g_1)=n$。于是得出整幂映射 $f_n:S\longrightarrow S$的莱夫希兹数是

$$L(f_n)=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k t_r(\varphi_k\circ g_k)=1-n$$

对 $n<3$完全可作类似的计算。

因而当 $n\neq1$时，f_n 的莱布希兹数 $1-n$ 不等于0，故 f_n总具有不动点；$n=1$ 时，f_1是恒等映射，S 的所有点都是不动点。若对映射 $f:X\longrightarrow X$，以$\Phi(f)$表示 f的不动点的集合，$^*\Phi(f)$表示 f的不动点的个数，即 $\Phi(f)$ 的元素个数。则我们可求出整幂映射 f_n的 $\Phi(f_n)$ 和$^*\Phi(f_n)$。首先显然有 $\Phi(f_1)=S$；其次对$n\neq1$，$\Phi(f_n)$ 是下面方程的解：

$$z = z^n, \quad |z| = 1$$

即是方程 $z^{1-n}=1$，$|z|=1$ 的解，因而得出不动点的集合为

$$\Phi(f_n) = \{z = e^{\frac{2\pi r i}{1-n}}, r = 0, 1, \cdots, |1-n| - 1\}$$

它有 $|1-n|$ 个元素，故$f_n(n \neq 1)$的不动点个数为 $^{\#}\Phi(f_n) = |1-n|$。这 $|1-n|$ 个不动点恰好是S上从点 $z=1$开始的 $|1-n|$ 个等分点（图5.3）。特别 f_0和 f_2都只有一个不动点 $z=1$，即$\Phi(f_0) = \Phi(f_2) = \{z=1\}$。图5.4是整幂映射$f_n$的示意图（其中横轴上的定义域圆周$S$的两个端点 O、O′应是粘合的，纵轴上值域$S$的端点O,O″ 也是粘合的），它表示了映射 f_n 的不动点的个数和位

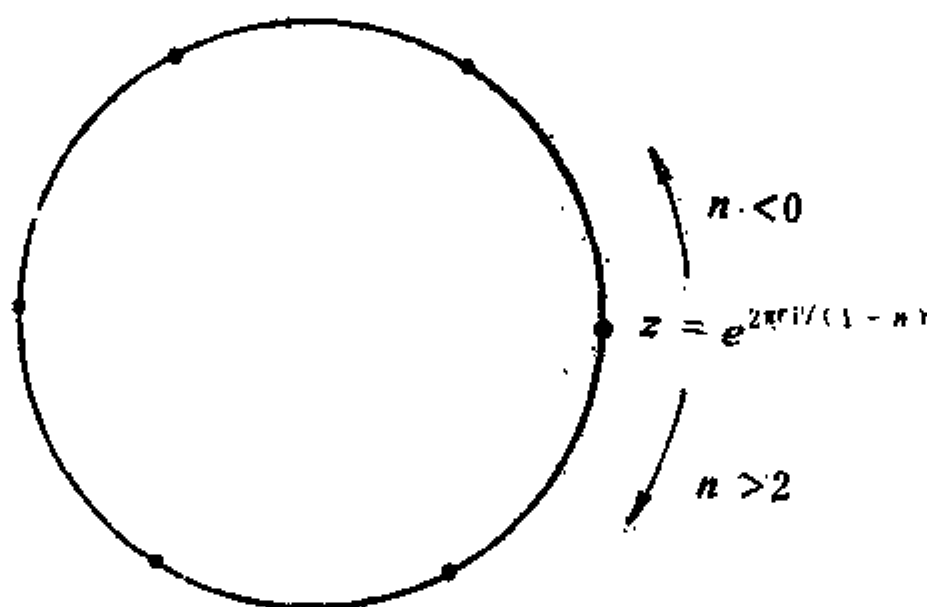


图5.3

置，即图象与对角线的交点是f_n的不动点，如在图（1）$n=-2$中，点$O''=O$、A和B是映射f_{-2}的三个不动点。

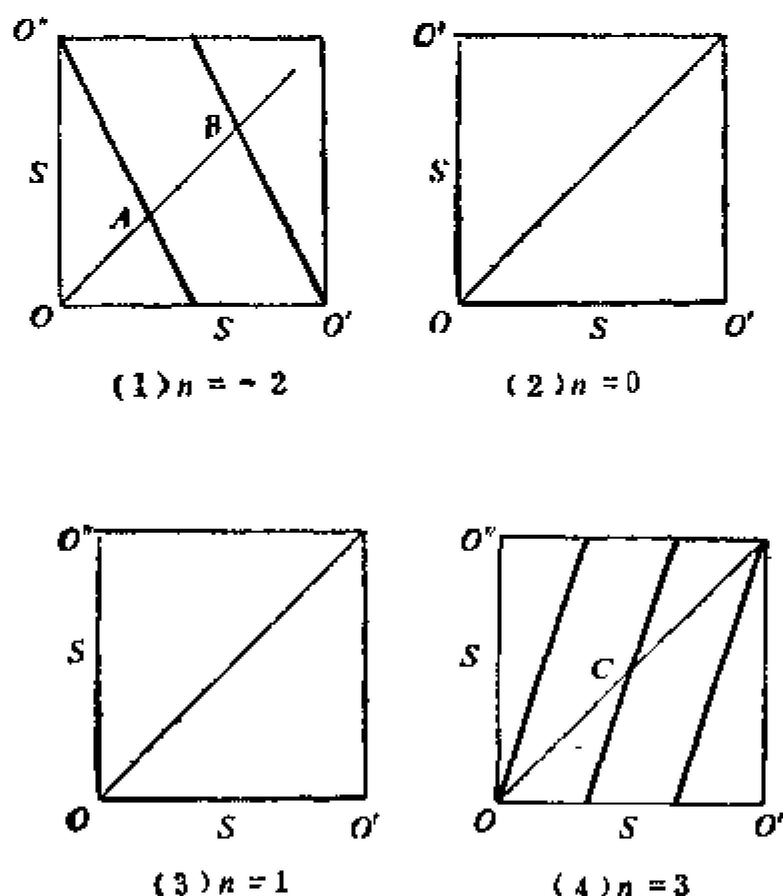


图5.4

至此我们完全确定了圆周S的整幂映射f_n的不动点的个数，而且还求出了不动点，而这些结果都是基于方程 $z=z^n$，$|z|=1$ 的可解性。然而对于圆周S的一般自映射 $f:S\longrightarrow S$ 和一般多

面体的自映射 $f:X\longrightarrow X$，通常无从通过解方程 $z=f(z)$，$|z|=1$和 $x=f(x)$，$x\in X$ 来求得映射f的不动点集 $\Phi(f)$和不动点个数 $^{*}\Phi(f)$．为了探求一般自映射 $f:X\longrightarrow X$的不动点个数，我们来分析整幂映射 f_n 及圆周S的一般自映射f: $S\longrightarrow S$的一些性质，以期得到启发。

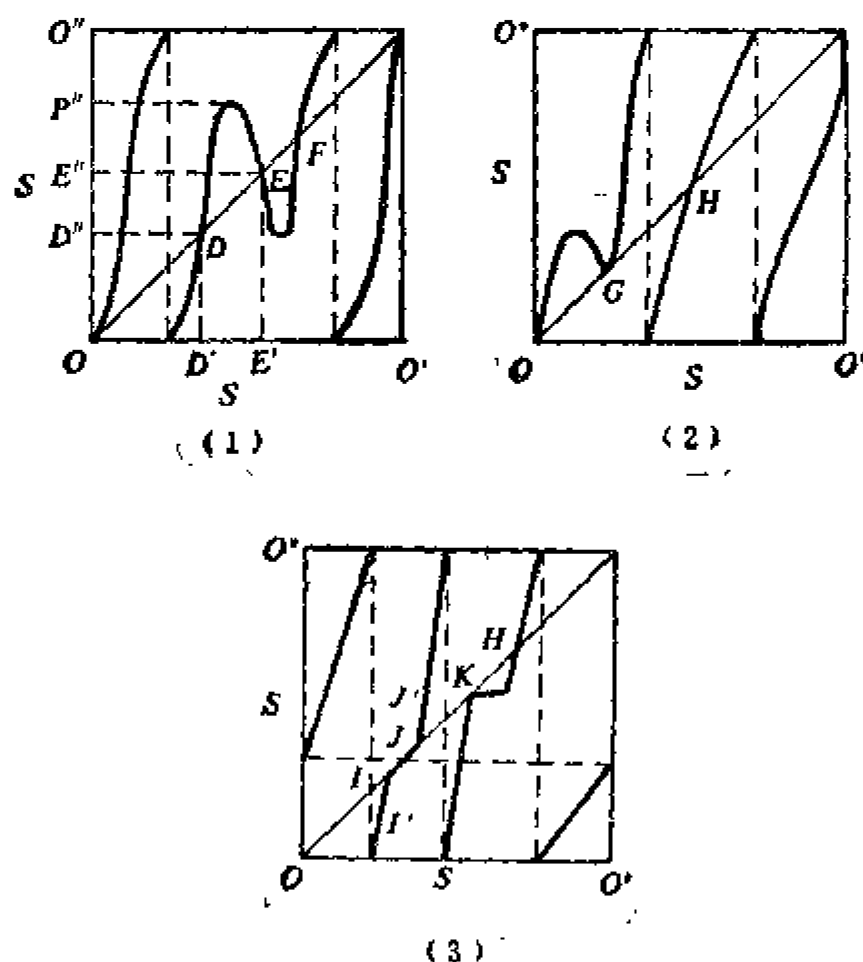


图5.5

图5.5 表示了圆周S的几个一般自映射．一

般说来不动点可分两种类型：一类是孤立不动点，即这种不动点存在一个邻域，在此邻域内不再有其他不动点，如图5.4（1）中的 O、A、B，（2）中O和（4）中的 O、C等；另一类是非孤立的不动点，如图5.4（3）中的不动点和图5.5（3）中线段 IJ 上的不动点。现观察圆周 S 的自映射的孤立不动点，它们又可分成三种：一种如图5.4（1）中的点A、B和图5.5（1）中的点 E，它们的特点是在不动点处由自变量点追过了象点；第二种如图5.4（4）中的点 O、C 和图5.5（1）中的点 D、F，它们是在不动点处象点追过了自变量点；第三种如图5.5（2）中的G和（3）中的点K，象点和自变量点谁也没有追过谁。我们希望能用数量来区别这三种孤立不动点，为此可引入不动点指数的概念。

定义 设z_0是 $f:S\longrightarrow S$ 的孤立不动点，它的指数记作 $v(f,z_0)$，定义为

$$v(f,z_0)=\begin{cases}+1, & \text{点}z\text{在 }z_0\text{处追过象点 }f(z)\\ -1, & \text{象点}f(z)\text{在}z_0\text{ 处追过点 }z\\ 0, & \text{在 }z_0\text{处 }z\text{与象点互相都未追过。}\end{cases}$$

在图5.4和图5.5中，不动点A、B、E的指数是$+1$，点C、D、F等的指数等于-1，点G、

K的指数为0。当 $n\neq 1$时，整幂映射 f_n有 $|1-n|$个孤立不动点，每个不动点的指数都是sign(1$-n$)（sign 是符号函数），各不动点的指数和等于$1-n$，恰好等于映射 f_n 的莱夫希兹数。

若$f:S\longrightarrow S$只有孤立不动点，从而只有有限个不动点，所有不动点的指数的和称为映射f的不动点指数和。

若映射 $f:S\longrightarrow S$的不动点不全是孤立的，如恒等映射 f_1和图5.5（3）中的映射，则定义不动点指数和就得另想别法。对恒等映射 f_1，如作S的自映射 g，它将S的每一点绕圆心作很小的旋转，则映射 f_1同伦于g，且g没有非孤立不动点（实际上 g没有不动点），它的不动点指数和是0。对图5.5（3）中线段 IJ上的非孤立不动点，如在I、J附近分别取点I'、J'、以 $I'J'$代替IJ，则这映射与原映射同伦，它在 $I'J'$这一段只留下一个孤立不动点。显然这是一种逼近思想，我们将这逼近思想用术语表达如下。

定义 设 $f:S\longrightarrow S$，$\varepsilon>0$ 是任意给定的充分小的正数，若存在映射$g:S\longrightarrow S$，使 $f\underline{H}g$，$f_0=f$，$f_1=g$，且对所有 $t\in I$ 有

$$d(f_t(z),\ f(z))<\varepsilon,\quad z\in S$$

其中 $f_t(z)=H(t,z)$，则称g是f 的一个ε逼近。

利用直线段逼近法不难证明下面的定理：

定理 5.4 设f 是圆周S的自映射，则对任给充分小的 $\varepsilon>0$，存在 f的 ε逼近 g，使 g 只有孤立不动点。

基于这一定理，对任一映射 $f:S\longrightarrow S$，任取充分小的$\varepsilon>0$，设 g是 f的 ε逼近，且只有孤立不动点，则称g 的不动点指数和为映射 f 的不动点指数和。

容易发现，两个同伦的映射 $f,g:S\longrightarrow S$的不动点个数未必相等，即使 f和 g都只有孤立不动点时也是如此，如图 5．5 所示的各映射都同伦于 f_1，但f_1 有 2 个不动点，而图5.5中（1）有 4 个不动点，（2）有 3 个，（3）有无穷多个。研究每个自映射的不动点的个数是困难的，因而我们转而这样来考虑问题，若 f 是一个自映射，所有与 f同伦的映射构成的集合称为 f所属的映射类，记为 $\langle f\rangle$，我们要研究映射类$\langle f\rangle$的最少不动点个数，即 $\{{}^*\Phi(f')\mid f'\simeq f\}$ 的下界，记为 ${}^*\Phi(\langle f\rangle)$。

对于多面体X，若U是X的一个开集，且映射 $f:U\longrightarrow X$在U中的不动点的集合是紧致的，则可以定义一个整数 $v(f,U)$，称为f在 U中的

不动点指数 *，它具有以下性质：

1° 同伦不变性：若 $f_t:U\longrightarrow X$，且 $\bigcup_{t\in I}\Phi(f_t)$是紧致的，则

$$v(f_0,U)=v(f_1,U)$$

2° 可加性：若 U_1、U_2是U的两个互不相交的开子集，f 在U中的不动点集是紧致的，且 f 在 $U-(U_1\cup U_2)$上没有不动点，则

$$v(f,U)=v(f,U_1)+v(f,U_2)$$

3° 单位性：若 f将U映成U中的一点，则

$$v(f,U)=1$$

可以证明，不动点指数在满足上述三个性质的条件下是唯一的。不动点指数 $v(f,U)$ 还具有下列性质：

4° 规范性：若 $f:X\longrightarrow X$是多面体X的自映射，则

$$v(f,X)=L(f)$$

其中 $L(f)$是映射 f的莱夫希兹数。

5° 不动点存在的充分条件：若 $v(f,U)\neq 0$，则 f在U中至少有一个不动点。

---

* 不动点指数$v(f,U)$的定义可见江泽涵〔2〕的附录 D，或 R.F.Brown〔23〕的第Ⅳ章。

对多面体X的自映射 $f:X\longrightarrow X$的不动点集$\Phi(f)$ 可以用下述方法进行分类：设x_0和 x_1 是 f 的两个不动点，若存在从x_0到 x_1 的道路c，使道路 $f\circ c$ 满足 $\{f\circ c\}=\{c\}$，则称不动点x_0和x_1是f等价的，其中 $\{c\}$表示所有与 c 有相同起终点的道路同伦类；显然 f等价是一个等价关系，在这等价关系下不动点集 $\Phi(f)$ 被分成的等价类称为 f的不动点类。例如，对圆周S的整幂映射 $f_n(n\neq 1)$ 而言，它的每个不动点都自成一类，即任意两个不动点都不是等价的；而在图5.5（1）中，不动点D、E 和F 在同一个不动点类中，如对D和 E、取D沿S匀速地走到E为道路c，横轴上表示为从 D'到 E'，则 $f\circ c$ 也是从D到E的道路，在纵轴上反映为从D''出发，跑过E''直到 P''后再折回到E''，显然$f\circ c\simeq c$，因而$\{f\circ c\}=\{c\}$。

可以证明，多面体X的自映射 $f:X\longrightarrow X$具有有限多个不动点类，记为 $F_1,\cdots,F_m$（当然它们是互不相交的），这样f的不动点集$\Phi(f)$ 可表示成这些不动点的并：$\Phi(f)=F_1\cup\cdots\cup F_m$。对于每个不动点类$F_i$，存在$X$的开集$U_i$，使 $F_i\subset U_i$，且U_i的闭包$\cap\Phi(f)=F_i$，称U_i的指数为不动点类F_i的指数，记作 $v(F_i)=v(f,U_i)$。利用

不动点指数的可加性可以知道，$v(F_i)$与开集U_i的取法无关，只要U_i满足条件$F_i \subset U_i$和U_i的闭包$\cap \Phi(f)=F_i$。

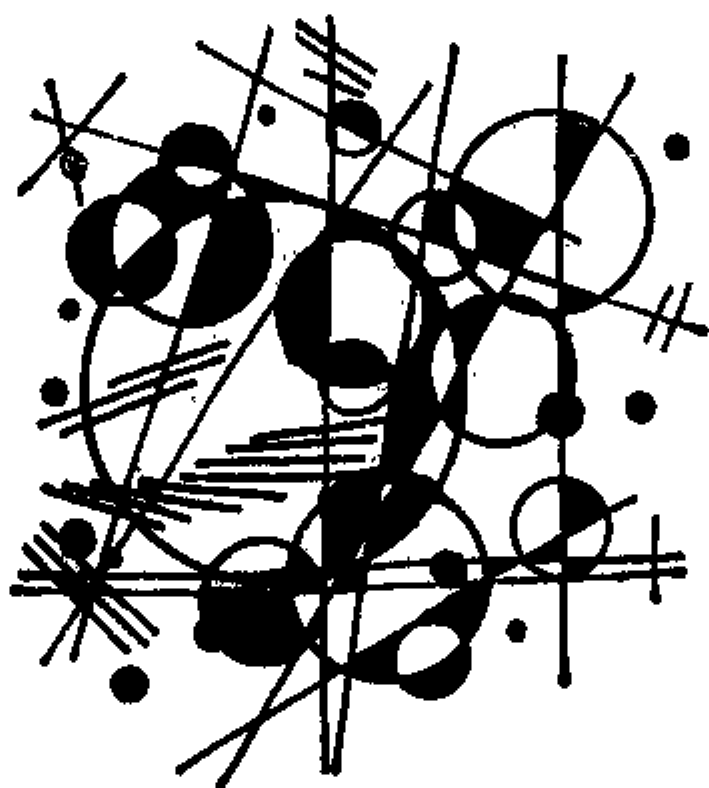
对多面体X的自映射 $f: X \longrightarrow X$ 的不动点类F，若 $v(F) \neq 0$，则称不动点类F是本质的，若 $v(F)=0$，则称F是非本质的。$f: X \longrightarrow X$ 的本质不动点类的个数称为映射 f的尼尔森数，记作 $N(f)$。尼尔森数是一个非负整数，而且还可证明它在同伦下是不变的，即如果 $f \simeq g: X \longrightarrow X$，那么有$N(f)=N(g)$。根据这一性质，再利用上面的不动点存在的充分条件5°，则可得

定理 5.5（尼尔森不动点定理） 连通多面体X的任一自映射 $f: X \longrightarrow X$ 及与其同伦的映射都至少有$N(f)$个不同的不动点，即$^*\Phi(\langle f \rangle) \geqslant N(f)$。

这样估计连通多面体的自映射f所属映射类的最少不动点个数的问题，就转化为求这映射的尼尔森数问题。求尼尔森数的问题已超出了这本小册子的范围，但我们指出这个问题至今远未解决，在1962年以前所得结果甚微，1964年我国数学家姜伯驹首先在这分面取得了突破，他在特定条件下计算出了尼尔森数，这特定条件已包括了多面体是李群的情况。以后石根华和姜伯驹又研究

了在什么情况下映射类的最少不动点个数可以达到尼尔森数，得到了很好的结果，他们的工作可见〔24〕，〔25〕，〔26〕等。

六 进一步的结果和应用



这一部分我们将介绍布劳威尔不动点定理的较新进展。一般不加证明，只作一些简单的评述。从中可见，一项优秀的数学工作具有何等强大的生命力，数学的各个分支又是怎样的和谐和统一。

1．拓扑度的理论

拓扑度（Topological Degree）是一门饶有兴趣的理论，近年来在非线性分析上起着巨大的作用。我们分几点来介绍。

（1）代数拓扑中的布劳威尔度。对$n\geqslant1$，令f是S^n到S^n的连续映射。第三部分中已知道$n+1$维空间中的单位球S^n有n个同调群，最后一个同调群$H_n(S^n)$总是同构于整数群$\mathbf{Z}$。现在f是S^n到S^n的连续映射，在第三部分的最后曾经指出，它可以诱导出一个同调群间的同态映射f_*，特别应是$H_n(S^n)$到$H_n(S^n)$的一个同态。但$H_n(S^n)\approx\mathbf{Z}$。所以此时$f_*$是$\mathbf{Z}$到$\mathbf{Z}$的同态，选取$\mathbf{Z}$的生成元1，那么必有$f_*(1)=d\cdot1$，这里$d$是某整数，可以是正的也可以是负的，或者是0，显然，这个d完全决定了这个同态　它不依赖于

生成元的选取。事实上，Z还有另一个生成元 -1，但 $f_*(-1)=-f_*(1)=-d\cdot 1=d\cdot(-1)$。因此我们有如下的定义。

定义（布劳威尔度）S^n到S^n的连续映射 f 的度是一个整数 $d(f)$，使得 $f_*(e)=d(f)\cdot e$，这里e 是 $H_n(S^n)$的生成元。

$n=1$时，度的几何含义可以看成是本书第二部分中S^1上的绕数，表示由S^1到S^1的映射f沿S^1绕了几圈。例如 $z\in S^1\xrightarrow{f}z^n\in S^1$，它的度 $d(f)$为n。由定义容易看出 $S^n\to S^n$ 的恒等映射 I 有 $d(I)=1$，而常值映射 c有 $d(c)=0$。

度反映了映射的整体性态，例如

定理 6.1 若 f 是 $S^n\to S^n$ 的连续映射且 $d(f)\neq(-1)^{n-1}$，则 f 有不动点。

证 这可由莱夫希兹不动点定理得出结论。设 $L(f)$为莱夫希兹数。我们已知，S^n 的同调群 $H_i(S^n)$当 $i\neq 0,n$ 时均为 0，而 $H_n(S^n)$ 是一维的线性空间。所以 $L(f)=1+(-1)^n d(f)$，如f没有不动点，则由莱夫希兹定理知 $L(f)=0$，即 $d(f)=(-1)^{n-1}$。因此 $d(f)\neq(-1)^{n-1}$ 保证了f的不动点存在。□

（2）分析学基础上的布劳威尔度理论。

上面已提到布劳威尔度的概念起源于代数拓

扑学中的同调群理论，并和不动点有密切关系。因此拓扑度理论原属代数拓朴学范围。但自50年代以起，拓扑度在分析学中的应用越来越广泛，并形成非线性泛函分析中的基本工具。为了便于分析学家掌握这一工具。许多数学家将整个理论重新建立在分析学的基础上。这一段我们来简单介绍分析学基础上的布劳威尔度理论。

设Ω是 n维欧氏空间中的有界开集，$f(x)$是$\overline{\Omega}$到R^n 中的连续映射，在Ω 上可微。$J_f(x) = \det|f'(x)|$ 为 f 在点 x的 Jacobi 行列式，如$J_f(x)\neq 0$，称x为 f的正则点（$p=f(x)$为 f 的正则值）。若$J_f(x)=0$，称x为f的临界点。全体临界点所成集合 Z 称为 f的临界集。当$x\in Z$时，$p=f(x)$称为 f的临界值。

我们设法对这种 f 定义拓朴度。 $\deg(f, \Omega, p)$。

首先考察当$p\in R^n\setminus(f(z)\cap f(\partial\Omega))$的情形，即$p$不是临界值，其原象也不在 Ω 的边界上。这时我们有：

引理1　f，Ω，p如上所定义，则 $f^{-1}(p)$是Ω中有限点集。

证　因 f 连续，$\{p\}$ 是闭集，其原象集$f^{-1}(p)$也是闭集，$f^{-1}(p)\subset\overline{\Omega}$，$\overline{\Omega}$是紧集。故

$f^{-1}(p)$ 也是紧集。倘若它是无限集，则必有聚点 $x^*\in f^{-1}(p)$。因 p不是临界值，故x^*是 f 的正则点，即 $J_f(x)\neq 0$。于是 f 在 p有连续反函数，即 f将是 x^*的一个邻域U和 p 的一个邻域 V 之间的同胚，即U和V之间是一对一的，这和 x^*是$f^{-1}(p)$的聚点相矛盾。□

这样，我们对 $p\in R^n\setminus(f(Z)\cup f(\partial\Omega))$ 可以定义

$$\deg(f,\ \Omega,\ p)=\sum_{x_i\in f^{-1}(p)}\operatorname{sign}J_f(x_i)$$

这是一个有限整数。

为了将这一定义推广到一般的连续映射和 p 为临界值的情形，我们可以将 $\deg(f,\ \Omega,\ p)$写成积分形式

$$\deg(f,\ \Omega,\ p)=\int_\Omega \psi\circ f(x)\cdot J_f(x)dx$$

其中 ψ 是一个在p为中心的某立方砖 I 以外为 0，且$\int_I\psi(y)dy=1$ 的函数。然后用一系列技巧，证明此积分值与 ψ 的选取无关，不必要求$p\notin f(z)$，此积分亦能存在，而且当用二阶连续可微函数 g 逼近连续函数 f 到一定精度时（小于p到$f(\partial\Omega)$的距离）值 $\deg(g,\Omega,\ p)$ 不变。于是可以得到

. **定义**（布劳威尔度）设 f 在 $\overline{\Omega}$ 上连续，$p \notin f(\partial\Omega)$，则定义 f 的布劳威尔度为

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p)$$

其中 g 二阶连续可微 $\| g-f \|_{C(\Omega)} < \mathrm{dist}(p, f(\partial\Omega))$. 此处 $\mathrm{dist}(a, M)$ 表示点 a 到集 M 的距离。

布劳威尔度具有以下四条基本性质

1. 同伦不变性：设 $f: \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow R^n$，对任何 $t \in [0, 1]$，$\phi(\cdot, t)$ 二阶连续可微，若 $p \notin \phi(\partial\Omega \times [0,1])$ 则 $\deg(\phi(\cdot, t), \Omega, p)$ 是常数。

2. 平移不变性：$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f-p, \Omega, \theta)$.

3. 区域可加性：设 Ω_1，Ω_2 都是 Ω 中有界开集且互不相交，$p \notin f(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$，则

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p)$$

4. 规范性：记 id 为恒等映射

$$\deg(id, \Omega, p) = \begin{cases} 1 & p \in \Omega \\ 0 & p \notin \Omega \end{cases}$$

以上四条性质也唯一地决定了布劳威尔度。

运用布劳威尔度的这四条性质，可以证明布劳威尔不动点定理。

定理 6.2 （布劳威尔不动点定理） 设 $\overline{D^n}$ 是n维欧氏空间 R^n 中的闭单位球，f是$\overline{D^n}$到$\overline{D^n}$的连续映射，则必有 $x\in\overline{D^n}$，使$f(x)=x$。

证明 考察 $f_t=id-tf$，$t\in[0, 1]$。当$t=0$时 $f_0=id$，$t=1$时 $f=id-f$。我们只须证 R^n 中零元素 θ的逆象集 $f_1^{-1}(\theta)$非空。因为$x\in f_1^{-1}(\theta)$，即 $f_1(x)=\theta$，亦即 $(id-f)(x)=\theta$，这意味着 $x-f(x)=0$，即 $x=f(x)$。

因 $f_t(\partial\overline{D^n})$ 不含 θ，所以由同伦不变性可知

$$\deg(f_1, D^n, \theta)=\deg(id, D^n, \theta)=1$$

（规范性）

下面我们引用区域可加性的一个推论：对任何空集上连续映射 f，$\deg(f, \phi, p)=0$。这只须在区域可加性中令 Ω，Ω_1，Ω_2 均为空集，得到 $\deg(f, \phi, p)=\deg(f, \phi, p)+\deg(f, \phi, p)$，这只有在 $\deg(f, \phi, \theta)=0$ 才能成立。

将区域可加性用于 f_1，$\Omega=D^n$，$\Omega_1=\Omega_2=\phi$，则当$p\notin f(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$时，即$\theta\notin f(\overline{D^n})$ 时，有 $1=\deg(f_1, D^n, \theta)=\deg(f_1, \phi, \theta)+\deg(f_1, \phi, \theta)=0$

这个矛盾来源于 $\theta\notin f(\overline{D_n})$。因此必须有 $\theta\in f_1(\overline{D_n})$，即有$f_1^{-1}(\theta)\cap\overline{D_n}$非空，这就证明了存在$x\in\overline{D^n}$使 $f_1(x)=(id-f)(x)=0$，即 $x=$

$f(x)$. □

这样通过布劳威尔度又回到了布劳威尔不动点定理。但是布劳威尔度的用处更为广泛，威力也更大了。

（3）勒瑞—肖德尔度 (Leray-Schauder Degree)

分析中遇到的连续映射一般是在无穷维空间上的．例如定义在连续函数空间$C[a, b]$上的积分算子，定义在 n阶连续可微函数空间$C^n[a, b]$中的微分算子等都是。因此我们希望将R^n上 f的布劳威尔度推广到无穷维空间上的勒瑞—肖德尔度。

然而，要想在无穷维空间上对任意连续映射都定义有同伦不变性、平移不变性、区域可加性和规范性的度是不可能的。如这可以，那么，布劳威尔不动点定理就将成立。然而下列例子说明那是不可能的。

例 记 $l^2=\left\{x=\{x_n\}\,\middle|\,\|x\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty\right\}$，设$f$定义在闭单位球$\overline{B}$上，使 $x\in\overline{B}$ 对应 $f(x)=(\sqrt{1-\|x\|^2}, x_1, x_2, \cdots)$，显然 f是连续的。但它没有不动点。不然的话，设$x^*\in\overline{B}$，

$x^*=f(x^*)$ ，但对任何 x，$\|f(x)\|=1$，故 $\|x^*\|=\|f(x^*)\|=1$，但是若记 $x^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots)$ 则$x^*=f(x^*)$ 意味着 $\sqrt{1-\|x^*\|^2}=x_1^*$，$x_2^*=x_1^*, x_3^*=x_2^*, \cdots, x_{n+1}^*=x_n^*$，… 这表明$x_1^*=x_2^*=x_3^*=\cdots=x_n^*\cdots$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^*)^2=\sum_{n=1}^{\infty}(x_1^*)^2<\infty$，这只有$x_1^*=0$，即 $x^*=\theta$。这和 $\|x^*\|=1$ 矛盾。

这个例子表明，要对任意连续函数都定义一个度是不现实的，只能退而求其次，加一些紧性的要求。这正如第四部分在处理肖德尔不动点时，要对映射加紧性一样。以下我们给出

定义（勒瑞—肖德尔度） 设X是巴拿赫空间，Ω是X中有界开集，K是Ω到X上的紧映射，令 $f=id-K$，$p\notin f(\partial\Omega)$，定义

$$\deg(f,\ \Omega,\ p)=\deg(f_\varepsilon,\ \Omega\cap E_\varepsilon,\ p)$$

其中 $0<\varepsilon<\text{dist}(p,\ f(\partial\Omega))$，$f_\varepsilon=id-K_\varepsilon$，$K_\varepsilon$是取值于有限维空间 E_ε 的有限维连续映射，对 $p\in E_\varepsilon$ 以及任何 $x\in\overline{\Omega}$，均有 $\|Kx-K_\varepsilon x\|\leqslant\varepsilon$。

这一定义的合理性是可以证明的。读者如果问：为什么要这样定义勒瑞—肖德尔度？其实这

和第四部分证明肖德尔不动点时的想法完全类似，都是将紧映射用有限维映射来逼近，当逼近到一定精度时，不动点不改变，拓扑度也不改变，二者其实是一种思想，仅是处理途径不同而已。剩下的问题是证明勒瑞—肖德尔度也满足：

1° 同伦不变性．设K是$\overline{\Omega}\times[0,1]$到$X$的紧映射，$p\notin(d-K)(\partial\Omega\times[0,1])$，则$\deg(id-K,\Omega,p)$是常数．

2° 平移不变性．$\deg(id-K,\Omega,p)=\deg(id-K-p,\Omega,\theta)$

3° 区域可加性．设$\Omega_1,\Omega_2\subset\Omega$，$\Omega_1\cap\Omega_2=\phi$，$p\notin(id-K)(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$；则$\deg(id-K,\Omega,p)=\deg(id-K,\Omega_1,p)+\deg(id-K,\Omega_2,p)$．

4° 规范性．

$$\deg(id,\Omega,p)=\begin{cases}1 & p\in\Omega\\ 0 & p\notin\Omega\end{cases}$$

有了这四条性质，可以象证明布劳威尔不动点定理一样地证明肖德尔不动点定理

定理 6.3 设K是X中闭单位球$\overline{B}$到$\overline{B}$的紧映射，则K在$\overline{B}$必至少有一不动点。

本节的内容引自[4]。有兴趣的读者可参看。

2. 不动点的计算

本书以前各部分讨论的都是不动点的存在性和唯一性问题，其证明方法也都是纯粹存在性的。这些定理没有告诉我们如何去求不动点，如何给出布劳威尔不动点定理的构造性证明，一个有趣的事实是：布劳威尔提出了如此重要的不动点定理，但没有给出构造性证明。另一方面，布劳威尔又是直觉主义数学哲学的创始人，按这种观点，排中律不一定都可靠，反证法不一定有效，纯粹存在性证明不算数，构造性证明才是真正的数学。布劳威尔在这样两个矛盾的理论中都是领导人物。当然这种矛盾并非逻辑上的矛盾，而是哲学观点上的不同，在数学家看来，只要有其数学价值，哲学观点的差异就不必细究了，可以保留各自的看法，也允许布劳威尔在不同时期不同场合采取不同的观点。

不动点的计算，历来是用牛顿迭代法来进行的。这并不奇怪，求不动点和求方程的根并无什么差别，而用牛顿迭代法求根则是众所周知的。

事情到60年代中期有了突破，美国耶鲁大学的斯卡夫首先给出不动点的逼近算法，他们采用

将空间作单纯分解的方法，逐段线性地逼近非线性方程的解．到70年代中期，凯洛格—李天岩—约克又取得了新的进展，他们用微分拓扑的方法代替通常的组合技巧，用光滑曲线取代了逐段线性．别开了新生面，通常称之为“连续方法”．这里我们介绍一下这一方法的诞生经过及其基本思想．

1973年底，马里兰大学研究生李天岩选修凯洛格的拓扑学课程．课上讲到布劳威尔不动点定理，证明方法是赫希的方法．1963年赫希在Proc. Amer. Math. Soc. 14, 364页上用一页篇幅给出了证明．这就是我们第二部分第3节用的那种证法，可以说是最简单的方法．其基本思想是：如果x不是f的不动点，则$f(x)\neq x$，从$f(x)$画一射线通过x必交边界上点$g(x)$，g是连续的，将单位球B内每点映到边界S（球面上）．但这是不可能的：单位球如不撕裂不可能缩到边界上去．这一矛盾证明了布劳威尔不动点定理．

李天岩听完课后问凯洛格：赫希的思想能否用来对布劳威尔定理作构造性的证明呢？这是一个大胆的想法．凯洛格和李天岩进行了仔细的讨论．他们检查赫希的证明，注意到在不动点集合K上，$g(x)$不能定义，在$B\setminus K$上$g(x)$可以定

义。如果 g 光滑，y 是边界S上一点，$x \in g^{-1}(y)$。还假定g在x的雅可比矩阵行列式$J(x) \neq 0$，则由反函数定理，$g^{-1}(y)$ 是经过x的一小段光滑曲线。在这小段上取不同于x的另一点 z，则仍有 $g(z)=y$，由 z 再重复上述过程，将有通过 z 的一小段曲线，这样一小段一小段开拓出去，直到不能开拓之处，就该是不动点了。

这一想法虽不错，但每点处的 $J(x) \neq 0$如何做得到。这就要用微分拓扑学中的沙德定理。它告诉我们，S中那些使 $J(x)=0$的 y所成之集其测度是0。这表明，可以应用反函数定理的 y 几乎充满了S。因而具体实施起来，成功的概率是1。

李天岩的导师约克也热衷于这一问题的讨论，亲自整理成文。题目是《布劳威尔不动点定理的构造性证明及计算结果》，刊于 SIAM J. Num、Anal，4 第473—483页，（1976）。

这一成果在数学界引起强烈反应。它将抽象的微分拓扑和代数拓扑方法用于实际计算，开创了"整体"性的计算数学新分支。当代著名数学家，菲尔兹奖获得者斯梅尔也加入了这一行列，创立了大范围牛顿方法。数值计算的连续同伦算法始于布劳威尔不动点的研究，但其影响已远非

这一老问题了，数个非线性分析都受惠于它。

本节内容主要参考〔18〕。

3. 半序集上的不动点

本书前所讨论的不动点理论，都是在距离空间中讨论的，n维欧氏空间 R^n、线性赋范空间、希尔伯特空间等都是距离空间。距离是一种拓扑结构，它用球 $B(x, \varepsilon)$ 描写x点的 ε 邻域，并借以刻画收敛性，讨论极限性质。本节将跳出这一框框，在没有拓扑结构但有半序结构的集合上讨论不动点问题。

半序集R是指在集R上定义了一个二元关系$\leqslant$，满足1° $x\leqslant x$，2°若 $x\leqslant y, y\leqslant x$则$x=y$，3°若 $x\leqslant y$，$y\leqslant z$，则 $x\leqslant z$。则称 $(R, \leqslant)$是半序集。

某集S的所有子集2^S按包含关系是半序集。自然数中按整除关系是半序集。

设M是半序集R的子集，$p\in R$ 称为M的上（下）界是指对任何 $m\in M$ 都有 $m\leqslant p$ $(p\leqslant m)$。上界中最小的（如果存在）称为上确界(lubM)，下界中最大的（如果存在）称为下确

界（glbM）。

一个半序集R，如果它的每一子集都有上确界和下确界，则称R是完备格。

上述的2^S（S的全体子集所成之集）构成完备格，事实上，若 $M\subset 2^S$ 是S的子集的一部分，则M的上确界是$\bigcup_{m\in M} m$，下确界是$\bigcap_{m\in M} m$。

记半序集R到R的映射为T。如果当$x\leqslant y$时，有 $Tx\leqslant Ty$，则称T是单调映射。

若R是完备格，$X\subset R$称为定向集，如果X的每一个有限子集都有含于X内的上界。

在完备格上的自映射，如果对任何定向集X都有

$$T(\text{lub}(x))=\text{lub}(T(x))$$

称T是连续映射，每个连续映射都是单调的，反之不然。

现在我们可以证明

定理 6.4 设L是完备格，T是L上单调映射，（1）如果存在 $a\in L$ 使 $a\leqslant T(a)$，则必有不动点 a^*，使$a\leqslant a^*$。(2)若存在 $b\in L$ 使$T(b)\leqslant b$，则必有不动点b^*，使 $b^*\leqslant b$。

证明 我们只须证明（2），（1）的证明是类似的。令 $G=\{x\,|Tx\leqslant x\}$，由于$T(b)\leqslant b$，

故G非空，由于L是完备格 G存在下确界 $g=\mathrm{glb}(G)$。先证 $g\in G$。事实上，对任何 $x\in G$，$g\leqslant x$。由T的单调性知 $Tg\leqslant Tx$ $(x\in G)$，故 $Tg\leqslant x$，因此 Tg是G的下界，但 g 是下确界，故 $Tg\leqslant g$，此即证明了 $g\in G$。

其次，我们证明g 就是不动点，只须再证 $g\leqslant Tg$。但由 $Tg\leqslant g$可知 $T(Tg)\leqslant Tg$，这表明 $Tg\in G$。而 g是下确界，当然有$g\leqslant Tg$。取 $g=b^*$，$b^*\leqslant b$。□

定理 6.4中结论还可以加强为：b^*是 T 的不动点中最小的。为此先设 β是T的不动点集合 $F=\{x|\ Tx=x\}$的下确界，故 $\beta\leqslant b^*$。另一方面，$F=\{x\ |Tx=x\}\subset G=\{x\ |Tx\leqslant x\}$，$b^*$是$G$的下确界，而 $\beta\in F\subset G$，故 $b^*\leqslant\beta$，因此 $b^*=\beta$。这就得到了结论。

这一证明看来很简单，但却有重要意义，它最初是著名数理逻辑学家塔尔斯基于1955年得出的，由于这一定理不必考虑拓扑问题，因而可以用来处理离散系统的不动点问题，在自动机理论、数学语言学、半序线性空间上有广泛应用。80年代以来，第五代电子计算机正在酝酿设计，其核心是一种"逻辑程序设计"(Logic Programming)。而一种程序的所有赫尔勃兰特解释构

成完备格，并有相应的连续映射自然地生成。连续映射必单调，因此不动点定理就能发挥作用了。有兴趣的读者可参看 J.W. Lloyd 著《Foundations of Logic Programming》, Springer-Verlag (1984)，其中提到程序的最小赫尔勃兰特模式是用不动点来刻画的(p.31)。

现在让我们回到完备距离空间的压缩映射定理上来，如果我们对完备距离空间 (X, d)定义一个半序，半序空间的不动点定理和压缩映射不动点有何联系？

对 (X, d)，设 $\varphi(x)$ 是定义在X上的下方有界的下半连续实函数，亦即 $\varphi(x)\geqslant l>-\infty$，且对任何 $x_0\in X$，任给 $\varepsilon>0$，总存在 δ 球 $B(x_0, \delta)$，使当 $x\in B(x_0, \delta)$时，$\varphi(x)-\varphi(x_0)>-\varepsilon$。($\varphi(x)$在任何点 x_0处附近x的值，尽管可以大于 $\varphi(x_0)$ 很多，但不能小于 $\varphi(x_0)$ 很多)。

我们定义，$x\leqslant y$ 当且仅当$d(x,y)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y)$。显然这是一个半序：(1) $x\leqslant x$，这因为 $d(x, x)=0$，$\varphi(x)-\varphi(x)=0$。(2) 若 $x\leqslant y$，$y\leqslant x$，则有 $d(x, y)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y)$，$d(y, x)\leqslant\varphi(y)-\varphi(x)$，但 $d(x, y)=d(y, x)$，欲这两式同时成立，只能 $d(x, y)=0$，即

$x=y$. （3）若 $x\leqslant y$，$y\leqslant z$，则 $d(x,y)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y)$，且$d(y,z)\leqslant\varphi(y)-\varphi(z)$。此时 $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y)+\varphi(y)-\varphi(z)=\varphi(x)-\varphi(z)$，故有$x\leqslant z$。

此时我们有定理

定理 6.5 设 (X,d) 是完备距离空间，φ 是下有界的下半连续函数，F 是 X到 X的映射（不必连续），但满足

$$d(x,Fx)\leqslant\varphi(x)-\varphi(Fx),\quad x\in X$$

则 F 至少有一个不动点

证明可见[6]p16。

用这一定理可以导出压缩映射原理，设F是压缩映射：$d(Fx,Fy)\leqslant\alpha\cdot d(x,y)$，$0<\alpha<1$。因此，$d(Fx,F(Fx))\leqslant\alpha d(x,Fx)$。我们还可得到

$$d(x,Fx)-\alpha d(x,Fx)\leqslant d(x,Fx)-d(Fx,F^2x)$$

即

$$(1-\alpha)d(x,Fx)\leqslant d(x,Fx)-d(Fx,F^2x)$$

现在取 $\varphi(x)=(1-\alpha)^{-1}d(x,Fx)$，则$\varphi$ 是下有界的（$\varphi(x)\geqslant0$）.又因F是压缩映射，所以F是连续映射，$d(x,Fx)$ 是x的连续函数，故φ连续，这样对这个 φ应用定理 6.5 就得到F有不

动点。

由此看来，半序集上的不动点定理具有很强的概括性，它正在引起人们的密切注意。

4. KKM 定理

我们先引进一些概念。

设E是线性空间，E的一切子集所成之集类记为$\Omega(E)$。今设 $A\in\Omega(E)$，若E中每个有限维子空间L和A之交集按L上的欧氏拓扑是闭的，则称A为有限闭的。如果$\{A_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是E的子集族，其中的任何有限个子集都有非空的交，则称A_λ具有有限交性质。

设X是线性空间E的子集，G是X到 $\Omega(X)$的映射。如果对X中任何有限子集$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，其凸包含在 $\bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)$ 之中，称 G为KKM映射。KKM是 Knaster，Kuratowski，Mazurkiewicz 三位数学家名字的缩写。

定理 6.6 （KKM 定理）设G是线性空间E中子集X到 $\Omega(X)$ 的 KKM 映射，且对每一$x\in X$，$G(x)$是有限闭的，则集族 $G(x)$具有有

限交性质。

证 设若不然，则我们有一集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$，使得 $\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i)$ 为空集。记 L 为$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$张成的有限维子空间，$d$ 为 L 上的距离。凸包 $co\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$记为$C$，显然 $C \subset L$。由假定条件 $L \cap G(x_i)$在L 中闭。故 x 与 $L \cap G(x_i)$ 的距离为 O 的充要条件是 $x \in L \cap G(x_i)$。现在 $\bigcap_{i=1}^{n} (L \cap G(x_i)) = \phi$，所以对每一$x \in C$，不能有 $d(x, L \cap G(x_i))$ 都为 O(1, 2, …, n)此即

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} d(x, L \cap G(x_i)) \neq 0, \quad x \in C$$

$$令 \quad f(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \sum_{i=1}^{n} d(x, L \cap G(x_i)) \cdot x_i.$$

则 $f(x)$ 是C到C的连续映射。由有限维空间的布劳威尔不动点定理，f 在凸紧集C上必有一不动点 $x^* \in C$。但 x^*与 $L \cap G(x_i)$的距离不能都为O，记 $\sigma = \{i \mid d(x^*, L \cap G(x_i)) \neq 0\}$，则 $x^* \notin \bigcup_{i \in \sigma} \{G(x_i)\}$。但是

$$x^* = f(x^*) \in \mathrm{co}\{x_i, \ i \in \sigma\} \subset \bigcup_{i \in \sigma} \{G(x_i)\}$$

这个矛盾证明了定理。

定理 6.7（樊畿） 设E是线性赋范空间，X是E的任一子集，G是 KKM映象。若对任何$x \in X$，$G(x)$ 在E中闭，且有某一个是紧集，则$\cap \{G(x) \mid x \in X\} \neq \phi$。

这由E中闭集必有限闭的拓扑学结论即可从KKM 定理得出。

定理 6.8（樊畿不动点定理） 设C是线性赋范空间E中的紧凸集，F是C到E中的连续映射。如果C中$F(x) \neq x$的那些点x，连接与$F(x)$的线段上至少包含C中两点，则F在C中必有不动点。

证明 我们分两步走。

先证此时必存在 $y_0 \in C$，使 $\| y_0 - F(y_0) \| = \inf\limits_{x \in C} \| x - F(y_0) \|$

我们作 $G(x) = \{y \in C \mid \| y - F(y) \| \leqslant \| x - F(y) \| \}$

因F连续，集 $G(x)$在C中闭，紧集的闭子集必为紧集，故$G(x)$是紧集。以下证明G是KKM映射。如若不然，有 $y \in \mathrm{co}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset C$，

但$y\notin \dot{\bigcup\limits_{i=1}}G(x_i)$，则$\|y-F(y)\|>\|x_i-F(y)\|$。这表明点$x_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$全部位于以$F(y)$为心，$\|y-F(y)\|$为半径的开球中，其凸包当然也在该球中，故得

$$\|y-F(y)\|>\|y-F(y)\|$$

此矛盾证明了G是KKM映象。现在再由上述的樊畿定理知，存在$y_0\in\bigcap\limits_{x\in C}(G(x))$使得

$$\|y_0-F(y_0)\|\leqslant\|x-F(y_0)\|，\forall x\in C$$

即 $$\|y_0-F(y_0)\|=\inf_{x\in C}\|x-F(y_0)\|$$

第一步证完。

现在转向第二步，证明上面的y_0即为F的不动点。如若不然，y_0不是F的不动点，则由定理条件知y_0与$F(y_0)$线段上必含C中异于y_0的点$x^*=t^*y_0+(1-t^*)F(y_0)$，$t^*\in(0, 1)$。于是

$$\|y_0-F(y_0)\|\leqslant\|x^*-F(y_0)\|=t^*\|y_0-F(y_0)\|$$

这就引出了矛盾。定理证毕

从樊畿不动点定理可以立知肖德尔不动点定理成立："若C是线性赋范空间中的紧凸集，F是C到C的连续映射，则F必有不动点"。因这时$F(x)$在C内（不仅在E内），x与$F(x)$的联线

在C中，当然含有C中的点。

KKM 映射和樊畿的许多结果，与极值原理有密切联系，因而在对策论上有重要应用，颇为世人所称道。其中的一个是

定理 6.9(Sion) 设X和Y是线性赋范空间E和F中的两个非空的紧凸集，设 $f: X\times Y\to R$ 满足

1° 固定 $x\in X$，$f(x, y)$关于 y 是下半连续的（指对 $r\in R$，$\{y\in Y|f(x, y)>r\}$ 是Y中开集）且是拟凸的（指对 $r\in R$，$\{y\in Y|f(x, y)<r\}$是Y中凸集）。

2° 固定 $y\in X$，$f(x, y)$关于 x 是上半连续的（指对 $r\in R$ $\{x\in X|f(x, y)<r\}$ 是X中闭集）且是拟凹的（指对$r\in R$，$\{x\in X|f(x, y)>r\}$是X中凸集）。

则

$$\max_x \min_y f(x, y)=\min_y \max_x f(x, y)$$

这是极大极小问题中一个重要的存在定理，有许多重要应用。该定理的证明见[14]。

顺便指出樊畿教授是美籍华裔数学家，1915年出生。1936在北京大学毕业后去法国留学，后去美国。1985年在加州大学圣他巴巴拉分校退休。

5. 整函数与半纯函数的不动点

以前我们讨论的主要是连续映射的不动点定理。体现数学统一和谐最充分的概念是复平面上的解析函数，尤其是整函数和半纯函数。

设 $f(z)$是在全平面解析的函数，即整函数。$f(z)$的不动点定义和通常一样：若 z_0能使 $f(z_0)=z_0$，则z_0称为 $f(z)$的不动点。

若 $f(z)$是 n阶多项式，则 $f(z)$的不动点相当于 $F(z)=f(z)-z$的零点。若 $n>1$，则$F(z)$仍为n阶多项式，共有 n个零点，即 $f(z)$ 有 n个不动点。

若 $f(z)=e^z+z$，则$f(z)$没有不动点。这是因为 $F(z)=f(z)-z=e^z$ 没有任何零点。

对一般的整函数，我们有著名的毕卡定理：超越整函数可以取任何值无限多次，至多有一个例外。

若 $f(z)$是超越整函数，那么 $F(z)=f(z)-z$ 仍然是超越整函数，根据毕卡定理，$F(z)$ 要末不取零值，即没有零点，要末取得零值，那就会取无穷多次，因而有无穷多个零点。这等于说，超越整函数 $f(z)$ 要末没有不动点，要末有

无穷多个不动点。只有 n 阶多项式取有穷多个（n个）零点。

那么，什么样的整函数有无穷多个零点呢？这是复变函数论中的一个研究分支。1952年，Rosenbloom 写了第一篇这方面的文章，以后续有研究，现已总结在《Factorization of Meromorphic Functions》一书中，作者为 Gross，此书由美国海军研究室数学研究中心于1972年出版。

这方面的主要结果有

定理A 如 $P(z)$是非线性多项式，$f(z)$ 是超越整函数，则$P(f(z))$ 有无穷多个不动点，特别地，若 f和 g都是超越整函数，那么 f或$f(g)$ 必定有无穷多个不动点。

定理B 若 $f(z)$ 是超越整函数，$n\geqslant 1$，则 $f(z)$和它的n 阶导函数 $f^{n}(z)$ 中必至少有一个具有无穷多个不动点。

记 $f_n(z)$为 f的 n 次复合函数。如果 z_0 是 $f_n(z)$ 的不动点，但不是 $f_j(z)$ （$j<n$）的不动点，则称z_0是 f的 n级不动点。

定理C 若 $f(z)$是超越整函数，则$f_m(z)$均有无限多个不动点，至多有一个m值例外。

定理D 若 $f(z)$是级小于 $\frac{1}{2}$的整函数，G

是 $f(z)$的不动点集。若对$z\in G$，$f'(z)\neq e^{2\pi i\theta}$ (θ为有理数)，则对任何正整数 n，$f(z)$有无限多个恰为 n级的不动点。

6. 不动点定理的几个应用

作为本书的最后一节，我们给出不动点定理的几个应用。

1) 代数基本定理的证明

定理6.10 设 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 是复多项式，则必有一根。

证 不妨设$a_n=1$，令$z=re^{i\theta}$ $0\leqslant\theta<2\pi$. 记

$$\alpha=2+|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|$$

今再定义

$$g(z)=\begin{cases} z-\dfrac{f(z)}{\alpha e^{i(n-1)\theta}} & |z|\leqslant 1 \\ z-\dfrac{f(z)}{\alpha z^{n-1}} & |z|\geqslant 1 \end{cases}$$

显然 g是连续函数。今考察 C $\{z; |z|\leqslant\alpha\}$，$C$是复平面上紧凸集。现证 g是C到C上自映射。

若 $|z|\leqslant 1$，则

$$|g(z)|\leqslant|z|+\frac{|f(z)|}{\alpha}\leqslant 1+(1+|a_0|+\cdots$$

$+|a_{n-1}|)/a \leqslant 1+1=2<a$。

若 $|z| \geqslant 1$ 则

$$|g(z)| \leqslant \left| z-\frac{z}{a}-(a_0+\cdots+a_{n-1}z^{n-1})/az^{n-1}\right| \leqslant (a-1)+(|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|)/a \leqslant a-1+\frac{a-2}{2} \leqslant a$$

故C对g不变，由布劳威尔不动点定理，g存在不动点 x_0，x_0 即为 $f(z)=0$的根。□

2）经济平衡点问题

设有N个生产者 P_1，P_2，…，P_N 各生产某种产品G_1，…，G_N，数量分别为 X_1，X_2，…，X_N，x_{ij}表示P_i的产品被P_j消费的数量，

$$Y_i=X_i-\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$$

为第i种产品的最大需求量。$a_{ij}=x_{ij}/X_j$ 称为生产系数。我们假定它们是与X_i无关的常数，此时有

$$(I-A)X=Y$$

此处$A=(a_{ij})$。经济平衡点问题是给出$Y=(Y_1, Y_2, \cdots, Y_N)$ 求$X=(X_1, X_2, \cdots, X_N)$。然而实际上应认为 a_{ij} 是连续的非负函数。（这比假定 a_{ij} 是常数更接近实际），这样就会涉及到非

线性映射的不动点了。

现在假设生产者P_i当其收入为x_i时用于购买第j种产品G_j所花的钱为$f_{ij}(x_i)$，我们称之为需求函数。当$x=0$时，所有$f_{ij}(x_i)=0$。

如果P_i以所有收入买别人的产品，则有等式

$$x_i=\sum_{j=1}^{N} f_{ij}(x_i)$$

另一方面，表示P_i收入的x_i应是各个生产者P_j购买G_i的总值：

$$x_i=\sum_{j=1}^{N} f_{ij}(x_j)$$

这样我们所要解决的经济平衡点问题的提法是：

如果关于x_i有N个单变量函数$f_{ij}(x_i)(j=1, 2, \cdots, N)$，再按照$i=1, 2, \cdots, N$排成$N^2$个函数的方阵，记$x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，满足

$$x_i=\sum_{j=i}^{N} f_{ij}(x_i),$$

则必存在点$x^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*)$满足

$$x_j^*=\sum_{j=1}^{N} f_{ij}(x_i^*)$$

定理6.11(Istratescu)　上述问题是有解的。

证　$C=\{y=(y_1,\cdots,y_N)\mid y_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{N} y_i=1\}$

显然它是一闭凸集，又因它有界，故是紧集。今定义函数

$$(g(y))_j=\sum_{i=1}^{N} f_{ij}(y)$$

则g 是$C\to C$的自映射，由布劳威尔不动点定理，必存在x^*使

$$x^*=\sum_{i=1}^{N} f_{ij}(x^*)$$

这就证明了定理。

3）微分方程的初值问题

设在区间〔0，T〕上考虑下述常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=g(t,u) & 0\leqslant t\leqslant T \\ u(0)=0 \end{cases}$$

这里 $u(t)$在〔0，T〕上一阶连续可微。一阶连续可微，且在O点处为0的函数全体记为C^1_0，如果对 $u\in C^1_0$定义范数

$$\|u\|_1=\max\{\|u\|,\ \|u'\|\}$$

其中 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,T]}|u(t)|$。则$C^1_0$是线性赋范空间。

我们将微分子算子$\frac{d}{dt}$记为L。L是C^1_0到连续函数空间$C[0,T]$的映射，它是双射，因而有逆算子 L^{-1}，它可表示为

$$(L^{-1}f)(t)=\int_0^t f(x)dx\equiv u(t),\quad Lu=f=u'$$

现证L^{-1}是有界算子. 由上式知

$$\|u\|=\left\|\int_0^t f(x)dx\right\|=\max_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t f(x)dx\right|$$

$$\leqslant T\|f\|=T\cdot\|Lu\|\quad \|u'\|=\|Lu\|$$

因此 $\|u\|_1\leqslant(T+1)\|Lu\|$. 记 $L^{-1}(f)=u$，我们就有

$$\|L^{-1}(f)\|_1\leqslant(T+1)\|f\|$$

故L^{-1} 是有界算子. 由泛函分析知识可知线性有界算子必连续。

定理6.12(Peano) 设上述初值问题中的 $g(t,u)$连续且有界，则问题有解.

证 设 $(Gu)(t)=g(t,u(t))$ 是将 $u(t)\in C[0,T]$映入 $C[0,T]$ 的连续映射，设 j 是 C^1_0 到$C[0,T]$的自然嵌入，这是紧算子. 于是 $jL^{-1}G$是 $C[0,T]$到$C[0,T]$上的连续紧算子，

由肖德尔不动点定理必有u_0满足

$$jL^{-1}G(u_0)=u_0 \quad 即 \quad \int_0^t g(x, u_0(x))\,dx=$$

$u_0(t)$.

这正是初值问题的解。□

× × × ×

不动点理论的介绍与欣赏就到此为止了。描写运动的函数、映射，反映了世界万物处于变化之中。由于研究函数，辩证法进入了数学，但是变中有不变，运动之中有不动，不动点理论正是在动与静这对矛盾展开中出现的规律性结果，只要世界还在运动，不动点理论就会继续存在，继续发展，有兴趣的读者，请到这一反映20世纪数学成就的潮头上去弄潮，去开拓，为发展我国的数学事业作贡献。

参 考 文 献

〔1〕江泽涵《拓扑学引论》，上海科学技术出版社，1978。

〔2〕江泽涵《不动点类理论》，科学出版社，1979。

〔3〕陈文岏 《隐函数定理》，兰州大学出版社，1986。

〔4〕张恭庆 《临界点理论及其应用》，上海科技出版社，1986。

〔5〕李继彬 陈兰荪：《生命与数学》，四川教育出版社，1986。

〔6〕J·Dugundji 等，《Fixed Point Theory》(I)，Polish Scientific Publishers，1982。

〔7〕T·Y·Li and J·Yorke，Period three implies chaos，Amer.Math. Monthly 82 (1975)，pp 985—992。

〔8〕井中 从平凡的事实到惊人的定理，自然杂志 8卷7期(1985)。

〔9〕张筑生 《微分动力系统原理》，科学出版社，1987。

〔10〕夏道行等 《实变函数论与泛函分析》（下册），高等教育出版社，1984。

〔11〕张石生 数学研究与评论 2卷3期(1982)。

〔12〕张石生 许昌师专学报 1987年第1期.

〔13〕李元喜 张国梁《拓扑学》，上海科技出版社.1986.

〔14〕张石生 《不动点理论及其应用》，重庆出版社，1984.

〔15〕D. R. Smart《Fixed point theorems》，中译本（张石生等译），重庆出版社,1982.

〔16〕N. Dunford and J.T. Schwartz:《Linear operators》.

〔17〕S.Kinoshita On some contractible contimous without fixed Point property (1953) Fund. Math. 40.

〔18〕梁美灵：混沌理论和同伦算法趣话，自然杂志9卷2期(1986).

〔19〕J· Leray Sur les e'、uations et les transformations J. Math, Pures et appl. 24 (1945)

〔20〕F.Browder The topological fixed index and its application in functional analysis Doctoral Dissertation, Princeton University, 1948.

〔21〕R. Knill On the lefschetz coincidence point formula, Doctoral Disserlation. University of Notre Dame, 1964.

〔22〕A. Granas The Hopf-pefschetz fixed point theorem for noncompact ANR's, Proceedings of the Conference on Infinite Dimensional Topology at Baton Rouge, la., 1967.

〔23〕R.F.Brown The lefschetz fixed point

theorem. Scott. Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

[24] 姜伯驹 Nielsen 数的估计，数学学报，11(1961).

[25] 石根华，最少不动点数和 Nielsen 数，数学学报，16(1966).

[26] 石根华，恒同映射类的最少不动点数，数学学报，18(1975).

外 国 人 名 索 引

Abel (1802—1829) 阿贝尔

Banach (1892—1945) 巴拿赫

Betti 佩蒂

Bolzano (1781—1848) 波尔察诺

Borel (1871—1956) 波莱尔

Brouwer (1881—1966) 布劳威尔

Cauchy (1789—1857) 柯西

Cayley (1821—1895) 凯莱

Cohen (1934—) 科恩

Dedekind (1831—1916) 代德金

Democritus (约公元前460—357) 德谟克利特

Descartes (1596—1650) 笛卡儿

Diophantus (约246—330) 丢番图

Dirichlet (1805—1859) 狄利克雷

Euclid(约公元前330—275) 欧几里得

Euler 欧拉

Feigen baum 菲根鲍姆

Fermat (1601—1665) 费马

Fourier (1768—1830) 傅里叶

Causs (1777—1855) 高斯

Gödel (1906—) 哥德尔

Hadamard (1865—1963) 阿达玛

Halley (1656—1742) 哈雷

Hilbert (1862—1943)	希尔伯特
Hirsch	赫希
Hopf (1894—1971)	霍甫
Huygens (1629—1695)	惠更斯
Jacobi (1804—1851)	雅可比
Kellog	凯洛格
Kronecker (1823—1891)	克罗内克
Kummer (1810—1893)	库麦
Ky Fan	樊畿
Lagrange (1736—1813)	拉格朗日
Landau (1877—1938)	兰道
Laplace (1749—1827)	拉普拉斯
Lebesgue (1875—1941)	勒贝格
Lefschetz (1884—1972)	莱夫希兹
Leray (1906—)	勒瑞
Leibniz (1646—1716)	莱布尼兹
Lipschitz	李卜希兹
Möbius (1790—1868)	麦比乌斯
Newton (1642—1727)	牛顿
Nielsen (1865—1931)	尼尔森
Peano (1858—1932)	皮亚诺
Picard (1856—1941)	毕卡
Poincare (1854—1912)	庞加莱
Poisson (1781—1840)	泊松
Riemann (1826—1866)	黎曼
Rhoades	罗得斯
Sard	沙德

Scarf	斯卡夫
Schauder (1896—1943)	肖德尔
Singer	辛哲
Smale	斯梅尔
Tarski	塔斯基
Taylor (1685—1731)	泰勒
Yorke	约克
Ломоносов (1711—1765)	罗蒙诺索夫